物理学選書10

山内恭彦・菊池正士・小谷正雄 編集

一般相対性および重力の理論

上智大学教授
理学博士
山内恭彦

大阪大学教授
理学博士
内山龍雄

大阪市大教授
理学博士
中野董夫

共　著

東京　裳　華　房　発行

Theory of General Relativity and Gravitation

by

Takahiko Yamanouchi, D. Sc.
Ryoyu Utiyama, D. Sc.
Tadao Nakano, D. Sc.

—1969—
2nd edition

SYŌKABŌ

TOKYO

序

Einstein が一般相対性理論を，1915 年に発表してから既に 50 余年もたっている．最初はその難解さのため，取りつきにくかったこの理論も，彼自身，その他 Weyl，Eddnigton などの本で，ややわかり易い形に整った体系として紹介され，またこの理論を支持する実験結果もいくつか現われるようになって，多くの理論物理学者の関心をひくようになった．そして，その時空構造に対する全く斬新な考え方，これを表現する理論体系の華麗さに魅了され，一時はかなりのブームを招いた．ところが，その後この理論によらなければ説明できないような現象があまり見出されず，物理学の研究の主流も，原子的問題に集中し，そこでは特殊相対論でことが足りるため，一般相対論に対する熱は急激にさめてしまった．このことは，Einstein を始めとして，研究者の多くが一般相対論の拡張を統一場理論に求めたことも，その理由の一つに挙げられよう．今日の場の理論から考えて，あの段階で重力場と電磁場とを統一しようとしたのは，かなり無理なことだったと思われる．

ところが，近頃になって，ロケットや人工衛星などによる観測が進むにつれて，宇宙論の研究材料が急激に増加した．この方法によれば，地球大気に遮られて観測できなかった放射線，粒子も自由に捉えられる．原子的現象では無視できた重力が，こういう大宇宙の問題では，大きな役割を演ずることは疑いないところである．今日色々な宇宙模型が提唱されているが，現象論から一歩進んだ基礎に立つ模型を与え得るのは，一般相対論だけである．

一般相対論を学ぶのに，最初の障碍はテンソル算法，Riemann 幾何学である．ところがこれは，特殊相対論のローレンツ変換，Minkowski 空間を，一般の座標変換，曲率のある空間に一般化するための数学的手段で，理論の物理的本質ではない．ちょうど，微積分学と古典力学の理論との関係に相当する．物理理論はその数学的表現とは不可分の関係にあるから，数学形式を軽んずるわけにはいかないが，大切なのはその形式により表現される物理的内容である．一般相対論の物理としての重点は，Newton の万有引力論に代わる，もっと包

括的な新しい重力論にある．本書があえてこれを標題に加えた理由である．

本書の前半（第 IV 章まで）では，一般相対論への入門書の役目をはたすために，Einstein の理論の基本的な事項をできるだけ平易に説明した．特殊相対論に関する大体の知識をもった読者ならば，他の参考書をみなくとも，必ず理解できるように説明したつもりである．また天降り式に Einstein の理論を紹介するのでなくて，読者が“一般相対論”を自分で創造していくといった体裁をとった．また従来の教科書にあるような数学偏重におちいらないように注意したから，読者は退屈せずに理論の展開を追っていけると思う．

これ対して後半，すなわち第 V 章以降は，幾分程度も高く，内容も比較的新しいこと，また他の教科書にあまり見かけないようなことが述べられている．特に第 V 章不変変分論や，最後の重力場の正準形理論（第 IX 章）は，内容が幾分数学的にすぎるうらみもあるが，オリジナルの論文は別として，普通の書物には見られないような高度の内容のもので，本書の特徴として自負しているものである．これは一般相対論を学ぶ者にはもちろんのこと，素粒子論を専攻する研究者にも役立つことを期待している．

本書は三人の著者の共著になっているが，原稿を書き下したのは内山，中野の両氏で，特に内山氏の執筆した部分が多い．ただし，記述の方針，内容の選定には三人で集まって合議し，原稿にも全部目を通して，隔意ない意見を交換し，これに従って訂正，書き直し，または削除した部分も少なくない．そこで，同じ資格で名を連ねるのは不当なようであるが，全巻に対して責任を負うという意味でこの形をとった．最後に，本書の成立に対して献身的努力を惜しまなかった裳華房の遠藤恭平氏と，この面倒な印刷を，いろいろな要求を容れて，ここまできれいに組み上げげた印刷所に対して，深い謝意を表する．

1967 年 11 月 8 日

山 内 恭 彦

目　次

第 I 章　一般相対性理論の基礎

第 II 章　テンソル解析

第 III 章　一般相対論的力学ならびに電磁気学

第 IV 章　重力場の方程式

第 V 章　不変変分論

第 VI 章　重　　力　　波

第 VII 章　Einstein の理論の実験的検証

第 VIII 章　宇宙論への応用

第 IX 章　重力理論の正準形式と量子化

付　　　録

第I章　一般相対性理論の基礎

§1. 序　論

Einstein の一般相対性理論ができあがったのは，特殊相対性理論が発表されてからちょうど 10 年目にあたる．この 10 年間に，当時の物理学者は特殊相対性理論をもっと一般化しようと試みた．ところで，この特殊相対性理論は実験事実をよく説明することができたばかりでなく，その数学的表現の美しさにおいても，まさに物理学における傑作の1つといえるであろう．しかしこの理論にも，その名の示すように2つの大きな制限というか未完成の点がある．その1つは，この理論はもっぱら慣性系同士の間の Lorentz 変換のみを考え，もっと一般的な座標変換についてはいっさい考えないことにしている点である．たとえば，ある慣性系から，それに対して一様な角速度で回転している直角座標系への変換とか，またこの回転系から眺めたときの物理法則と，もとの慣性系における法則とのあいだの関係がどうなるかについては，特殊相対論*)はなにも答えられない．ここで慣性系とはなにかということを説明すべきかもしれないが，それは §2 にゆずることにする．

特殊相対論のもう1つの未完成な点は，重力についての特殊相対論的な取扱い方ができていなかったということである．今世紀の始め頃，つまり特殊相対論が誕生した頃は，われわれが知っている場といえば電磁場と重力場しかなかった．この2つの典型的な場のなかで，電磁場の方は特殊相対論の枠(わく)の中にきれいにおさめられた．このことはむしろ当然といってもよいであろう．というのは，電磁場こそ特殊相対論の誕生のきっかけとなったものであるから，これが相対論の枠(わく)の中にきれいにおさまるのはあたりまえである．そこで残ったもう1つの場，つまり重力場をも同じように特殊相対論的に書き直したくなるのは当然であるが，これは必ずしも容易なことではなかった．その原因はこれから順に本書で説明していくが，簡単にいえば次のような事情による．重力場は電磁場とよく似た点もあるが，また反面，電磁場とは本質的に違った性質をもっている．それは重力の本質が時間空間と深く結びついているということである．そのため特殊相対論で考えられたような簡単な Minkowski 型の時空は，重力場を記述するのには不適当であるためである．

---

*) 一般相対性理論および特殊相対性理論は，もとのドイツ語の Allgemeine Relativitätstheorie および Spezielle Relativitätstheorie の直訳である．しかしこの訳語は少し長すぎてわずらわしいので，普通，一般（または特殊）相対論と呼ばれている．本書でもこれから見出し以外はこの簡略された訳語を使うことにする．

この第2の問題点，つまり重力の理論を特殊相対論的に書き直すという問題は，具体的には次のようなことである．すなわち，Newton の重力の法則はもともと静的なもので，遠隔作用的な性質をもっているから，特殊相対論に矛盾(むじゅん)する．特に作用の伝播速度は光速度 c を越してはならないという要請を破るものである．重力のポテンシャルを $\Phi(\vec{x})$ とすると，Newton の理論では，この Φ は次のような Poisson 型の場の方程式にしたがう．

$$\Delta\Phi(\vec{x})=4\pi G\cdot\rho(\vec{x})$$

ここに $\rho(\vec{x})$ は，重力場の源となる物質の質量密度，G は Newton の万有引力定数で

$$G=(6.670\pm 0.005)\times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\cdot g^{-1}\cdot sec^{-2}}$$

である．この重力場のようすをきめる方程式のほかに，もう1つ同時に考えねばならないことは，重力場の中での質点の運動方程式である．質量 m の質点が重力ポテンシャル Φ の影響をうけて運動をしているとすると，その方程式は

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}=-m\,\mathrm{grad}\,\Phi$$

である．これら2つの方程式では，時間 t が特別扱いをされているから，このままでは特殊相対論の立場からみてぐあいが悪い．そこで，これらを Lorentz 変換に対して共変な形に書き直すということが，とりもなおさず先に述べた“第2の問題点”を解決するということになる．

Nordström は，特殊相対論が重力場の存在するときでも正しく成立するものとして，第2の問題に真正面から取組んだ．彼の理論では，特殊相対論を是認(ぜにん)しているのであるから，光速度 c は重力場の中でも一定である．その結果，重力の影響で光線が彎曲(わんきょく)するというようなことは彼の理論では起こりえない．この結論は実験事実に反する．一方，彼の理論では，重力質量と慣性質量とは常に一致するようになっているから，この点ではこの理論は正しい．しかし，なんといっても Lorentz 変換のみを考えているということは，先にも述べた特殊相対論の第1の欠点を未解決のままにしておくことになるから，満足な理論とはいえない．

Einstein は，この問題を真正面から考える代わりに，Newton 力学でよく知られている次の事実に目をつけた．すなわち，一様な重力場の中で運動している質点のふるまいは，慣性系に対して一様な加速度で動いている座標系（これを一様な加速系と呼ぶことにする）からながめたときの自由粒子（つまり，重力はもちろん，その他いっさいの力の影響をうけていない粒子のこと）のふるまいと，力学的にはまったく同じであるということである．彼はこの事実を拡張して次のように仮定した．すなわち，上の2つの場合に，質

点の力学的ふるまいが同じであるばかりでなく，すべての物理現象も両者で同じように起こると仮定した．この仮定は，後に等価原理と呼ばれて，一般相対論の基礎原理の1つとなった．

この仮定は，重力の本質を部分的にあばきだしたものといえる．もしわれわれが慣性系同士の間の Lorentz 変換だけに固執していないで，慣性系に対して加速度運動をしている座標系への一般的な座標変換をも考えることにすれば，それにより少なくとも一様な重力場を創り出すことや，消し去ることができることになる．また，重力の作用をうけている質点の非相対論的な運動方程式を，どうしたら Lorentz 不変な形に書き直せるかということをくふうしなくても，自由粒子の方程式から出発して加速系に乗り移ることにより，自動的に重力の影響を計算できることになる．このような力学の問題だけでなく，同じような方法で電磁場に対する重力場の影響も計算することができる．このような考え方にしたがって，Einstein は多くの重要な結論を導きだした．たとえば，重力の影響が時間の進み方をどんなに変えるか，またエネルギー E をもつ物体の重力質量は，その慣性質量 E/c^2 に等しいといったような結論が導きだされた．さらに Einstein は，光の速さが重力場の中では一定でなく，その結果として，光線は重力の影響で彎曲することも証明した．

Einstein と Abraham は，重力の有無が光速度の大きさに影響をあたえることに目をつけて，静的重力場のようすを，重力場の中の各点における光速度 c の大きさで表現しようと考えた．つまり，光速度 c が重力場を記述する場の量とみなされることになる．彼らはこの光速度 c が場所と共にどんなに変化するかを決める1種の場の方程式を特殊相対論のわくの中で追求した．しかしながら，前にも述べたように，重力場は慣性系から加速系への変換と密接な関係があることを考えると，Lorentz 変換ばかりに固執しているのは首尾の一貫性を欠くものといえるであろう．

そこで Einstein は再び振り出しにもどって，一方では前に述べた等価原理を，また他方では Lorentz 変換からぬけだして，もっと一般の座標変換に対しても自然法則の形が変わらないという“一般相対性原理”をもう1つの指導原理として，ついに一般相対性理論を創りあげた．この一般相対論は，特殊相対論のきわめて自然な拡張となっている．Newton の重力ポテンシャル Φ は，この新理論では 10 個の成分をもつテンソルに置き換えられ，しかもそれは幾何学的には4次元時空の計量テンソルと見なされることがわかった．つまり重力場は，物理的にはわれわれになじみのふかい万有引力として，また幾何学的には時間空間の曲率という形でその姿を現わす．Einstein の考えだした重力場の方程式は，Newton の方程式の拡張されたものである．この方程式は，物理的に解釈すれば，

時空内におかれた太陽とか地球のような物質が，そのまわりにどのような重力場を生みだすかを教えてくれるものである．これを仮に幾何学的に見直すと，物質はそのまわりの時空に1種の歪みをひき起こすということになる．このことは均一なガラスの中に小さな石コロがはまりこんでいると，そのまわりのガラスが歪むのとよく似ている．この歪みのために，石コロの近くを通る光線は彎曲する．Einstein の考えをまねるならば，この光線の彎曲は，物理的にいえば光が石コロから力（つまり重力）をうけたからであるということになる．これに対して，ガラスが歪んでいるから光線がまがったのだという解釈は，ちょうど Einstein の幾何学的解釈に相当する．

このように Einstein の一般相対性理論は重力の本質を一方では物理的に，他方では幾何学的に解明記述したもので，これはむしろ重力理論と呼ぶほうが適当かもしれない．

§2. 等価原理

ここで話の本筋にはいる前に，慣性系という言葉の説明をしておくのがよかろう．いま，1つの座標系 S_0 を考える．この S_0 からながめたときに，1個の質点の時刻 T のときの位置座標を（X, Y, Z）とする．ここで，特殊相対論の記号にしたがって $X^0=cT$, $X^1=X$, $X^2=Y$, $X^3=Z$ と書くことにしよう．また質点の位置と，その位置を占める瞬間の時刻とを一緒にして，4次元座標，または簡単に座標と呼ぶことにして，それを単に $X^\mu(\mu=0, 1, 2, 3)$ と書くことにする.*)

質点は力学の法則にしたがって，時間のたつにつれてその位置を変えるから，（X, Y, Z）空間のなかに1本のきまった曲線が描かれる．もし時間と空間を一緒にした見方に立てば，質点の運動の歴史は時空という4次元世界のなかの1本の曲線になる．この曲線は普通は，質点の世界線と呼ばれている．この曲線を示す方程式は，適当なパラメター s を使って

$$X^\mu=f^\mu(s) \qquad (\mu=0, 1, 2, 3)$$

と書くことができる．パラメター s としては，たとえば T 自身を使ってもよい．

いま重力をはじめ，いっさいの外力（ただし遠心力のような見かけの力はここでは問題にしない）が，なにひとつこの質点に作用していないとき，この質点の運動方程式が，簡

---

*) 特殊相対論の場合と同じように，本書でも添字は上にも下にもつける．添字は，そのつけられる位置により意味がちがうから，注意しなくてはいけない．また，X^3 とは座標の第3番目の成分ということで，X の3乗ではない．X^1 の3乗は本書では $(X^1)^3$ と書くことにする．

単に

$$m\frac{d^2X^\mu(s)}{ds^2}=0 \tag{2.1}$$

となるものとする．たとえ外力が作用していなくても，たとえば回転する座標系から自由粒子を眺めれば（2.1）のようにはならない．(2.1)のような簡単な式に書けるのは座標系 S_0 がよくよくつごうのよいものであるからである．そこでこの S_0 のことを“**慣性系**”とか“**惰性系**”と呼んで，Newton 力学では特別に重視するわけである． この定義からわかるように外力の作用をうけない自由粒子は，この S_0 から眺めると等速直線運動をすることになり，Newton の慣性の法則が成立する．

また，S_0 と Lorentz 変換により結ばれる他の座標系もすべて慣性系であることもすぐにわかろう．

さて本論にもどって，いま慣性系 S_0 に対して，その Z 軸の正の方向に一定の加速度 g で走っている第2の座標系 S' を考えよう． S_0 から見たときの自由粒子の座標を X^μ，またこの同じ粒子を S' から眺めたときの座標を x^μ とする． X^μ と x^μ との間には Newton の運動学では，

$$x^\mu=X^\mu \quad (\mu=0,\,1,\,2), \qquad x^3=X^3-\frac{g}{2}T^2=X^3-\frac{g}{2}\left(\frac{X^0}{c}\right)^2 \tag{2.2}$$

という関係がある．この関係はもちろん Lorentz 変換ではない．(2.2) を自由粒子の方程式（2.1）に代入すると，

$$m\frac{d^2x^\mu}{ds^2}=0 \quad (\mu=0,\,1,\,2) \quad \text{および} \quad m\frac{d^2x^3}{ds^2}=-mg\left(\frac{dX^0}{ds}\right)^2\Big/c^2$$

となる．いまパラメター s を，$s=t=X^0/c$ とおけば，上の最後の式は

$$m\frac{d^2x^3}{dt^2}=-mg \tag{2.3}$$

となる．これは一様な重力が z 軸の負の向きに働いているときの，質量が m なる質点の運動を示す Newton の方程式と全く同じ形をしている．

この初等的な例からもわかるように，真の力がなにも働いていない自由粒子でも，これを S' からみると，あたかも重力の作用をうけているように落下運動をする． S' においてこの現象を正しく表現するのには，Newton の力学の法則に，さらに見かけの力による補正，つまり（2.3）の右辺のような補正項が必要である．このようなわずらわしい補正をしなくても，Newton の力学法則がそのままで成立するのは慣性系だけである．この意味で S_0 は S' より優れた座標系といえる．

しかし，ここで考えを変えて，(2.3) の右辺を真の重力と見なしたならばどうであろうか．このように変えても，S' からみて少なくとも力学に関しては一向に不つごうはない．いやむしろ，S' でも，S_0 と同様になんの補正をしなくても Newton の力学法則が成立することになる．

それゆえ，見かけの力と重力との区別を撤廃することは，S' に対する S_0 の優越性を取去ることになる．つまりどんな座標系をも，力学現象を記述する基準系として使用してよろしいという便利な結果がうまれることになる．このように，両種の力の区別の撤廃は，力学における無用な煩雑さを取除くことになる．

そこで，Einstein は上のような考えを単に一様な重力のときばかりでなく，一般の重力場の場合にも成立するものと仮定した．それればかりでなく，このような観測者自身の加速度運動に原因する“見かけの力”と重力とは，単に力学現象に限ったものでなく，すべての物理現象に対しても同じ影響をあたえるものと仮定した．これが**等価原理**と呼ばれるもので，一般相対論の基礎原理の 1 つである．

この等価原理を最も一般的な形で述べると，次のようにいえる．

“4 次元時空内の任意の 1 点のまわりのごく小さい領域 Ω を考える．いま適当に座標系 S を組み立てると，この S から見たときに Ω 内でのすべての物理現象に対する重力の影響が消去されているとする．このような特別な座標系 S を組み立てることは必ずできる．”

ここで“小さい領域”という制限をつけたのは，一般の重力場は時間的にも変化するであろうし，また空間的にも一様ではないからである．そのような場合でも，空間的にごくせまい領域に限れば，また，ごく短い時間に制限すれば，どんな重力場でも近似的に一様とみなすことができる．したがって，適当な加速度運動をする座標系を考えれば，その系からみると重力の影響を局部的に消去できるというわけである．このような例として，われわれがすぐ思いつくのは人工衛星のカプセルの中である．このカプセルの中に設けた直交座標系と，宇宙飛行士のもつ時計とで，われわれは上に述べた S を作ることができる．ある瞬間にカプセルのいる場所の重力は，カプセル自身の飛行運動により起こる遠心力で帳消しにされて，S からみたときカプセルの中は無重力である．しかし，無重力にみえるのはカプセルの中だけである．カプセルから十分離れた所では，この飛行士からみてももちろん重力は消されないで残っている．

S のもう 1 つの例としては，たとえば Einstein の“箱の実験”を少し実際的にあらためた次のようなものがある．いま，大阪市内のあるデパートのエレベーターのワイヤーを

切断して，エレベーターを自由落下させたとする．このエレベーターの中に設けた直交座標系はまさにSである．Sから見ればエレベーターの中は無重力状態になっている．しかし，このエレベーターから十分に離れた場所，たとえば東京における現象をSから眺めると，そこでは重力の影響は消されずに残っている．これは東京と大阪では，それぞれの土地での重力の方向がわずかではあるが異なるからである．そのために，エレベーターの自由落下により大阪の重力は相殺されても，遠方の東京の重力までも一度に消し去るわけにはいかない．

ところで，このような原理を採用できるのは次のような重力の特性のおかげである．すなわち，すべての物体に対してその慣性質量の大小にかかわらず，重力はこれらの物体に一定の加速度をあたえるということである．つまり等価原理が成り立つのは，重力質量と慣性質量の比がどんな物体についても常に一定であるということに由来する．この比は，重力の定数を調整することにより1にすることができるから，結局，等価原理は両種の質量の一致を意味する．この一致は Eötvös の有名な実験により証明された．Eötvös の実験というのは，地球上のある場所に置かれた物体に働く地球の引力（これは物体の重力質量に比例する）と地球の自転のため，この物体のうける遠心力（これは物体の慣性質量に比例する）との合力の向きが，どんな物体に対しても同じかどうかを，調べたものである．もし両種の質量の比がどんな物体に対しても同じならば，一定の場所ではこの合力の向きは物体に無関係で一定のはずである．彼は精密な ねじれ秤を利用してこの実験を行ない，10^{-9} の程度の誤差で両種の質量の比が1に等しいことを確かめた（§ 42 参照）．

さて，序論でも述べたように，重力が存在しないときは特殊相対論が成立する．そこで，上に考えたような“無重力系” S（これを今後は**局所慣性系**と呼ぼう）から時空内の無限小領域 Ω を眺めるときには特殊相対論が正しく成立すると仮定するのはきわめて自然であろう．そうすれば，Sから Lorentz 変換で得られる第2の座標系から Ω をみても，特殊相対論が成立するのはもちろんである．ただ，時空内に重力場がひろがっているときは，時空内の各点ごとにそれぞれ無限小の領域を考え，これらの各領域にそれぞれの局所慣性系を組み立てなければならない．というのは，Sを基準として物理現象を記述するときに，重力の心配をせずに，特殊相対論のわくの中で現象の正しい記述ができるためには，対象となるべき物理現象はたかだかこの小さな領域 Ω の中に起こるものに限るからである．

ここでもう一言注意をつけ加えたい．先に等価原理を述べたときに，Sからみると重力の“影響”を消し去ることができると書いたが，この影響という言葉ははなはだあいまい

である．一般相対論を完成したあとでこの等価原理をふり返って考えてみると，SからΩを眺めてさえも，重力の存在を必ずしも完全に抹殺するわけにはいかない．この等価原理は一般相対論を創るのには大変に有力な原理であったが，それだからといってこの原理の正しさについて限度があることを忘れてはならない．この点についてはあとでもっとはっきりと述べよう（§ 41 参照）．

§ 3. 一般相対性原理

前節で述べたことは要するに次のようにいえる．重力場が存在するときでも，4次元時空内の任意の点の近くの小領域 Ω に限れば，それに応じて局所慣性系 S を基準にとることにより，Ω 内では特殊相対論が成り立つようになるということである．しかし，S とは別の全く勝手な座標系 S_1 から Ω を眺めたときには，物理法則はどんな形になるであろうか．S と S_1 は一般には Lorentz 変換では結ばれないから，S_1 からみれば Ω 内のすべての物理現象は重力の影響のもとにある．つまり，上に提出した質問は，重力を消し去ったときに成立する法則，すなわち特殊相対論を知っているときに，それをもとにして重力の存在しているときの法則を導き出す方法はなにかということである．これの答が有名な“一般相対性原理”で，それは次のようにいえる．**“どんな座標系を基準としても，物理法則は同じ形式で表現されねばならない”**．これはあとで述べる数学的な用語を用いていいかえれば，**“物理法則は任意の座標変換に対して共変な形式に書かれねばならない”**ということになる．これが特殊相対性原理のごく自然な一般化になっていることはすぐにわかろう．

いま，4次元時空内に勝手な座標系 S_1 を組立てたとする．たとえば，仮想的な剛体の棒を格子状に組み，各格子点に時計をしばりつけ，適当な方法でこれらの時計を合わせておけば，これで座標系ができたことになる．剛体の棒を使用するのがいやならば，光学的に三角測量で各点に番地をつけてもよい．ともかく，いずれの方法でもよいから，連続的に，つまり隣接した2点の座標値は，互いにわずかしかちがわないように各点にそれぞれ座標値をわりあてたとする．このようにすれば各時空点は2重に座標値を与えられたことになる．1つはこの S_1 系の座標値であり，もう1つは，その点に固有な局所慣性系からみたときの座標値である．

いま，時空内の小さい領域 Ω 内の互いに接近した2点 P, Q を考える．Ω に適した局所慣性系Sから見たときの P, Q の座標をそれぞれ X^μ，および $X^\mu+dX^\mu$ とする．また，これらを S_1 から見たときの座標を x^μ，および $x^\mu+dx^\mu$ とする．Ω 内では，X

とxの間には連続な関数関係があると考えてよいから，dX と dx との間には

$$dX^{\mu}=\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial X^{\mu}(x)}{\partial x^{\alpha}}\cdot dx^{\alpha}$$

なる関係が成立する．ここでテンソル算の便法にならって，同じ数式の中で上下に同じ添字が使われているときは，その添字について0から3まで和をとるものと約束して，和の記号 $\sum$ を省くことにすると，上の式は

$$dX^{\mu}=(\partial X^{\mu}/\partial x^{\alpha})\cdot dx^{\alpha}$$

2点 P，Q のあいだの不変距離は，重力が存在しない場合ならば，特殊相対論の教えにしたがいわれわれは容易に計算できる．そこで，重力の存在するときでも，§2 に述べたことにしたがい，まず局所慣性系にたちもどって，不変距離を定義するのが妥当であろう．そこで，PQ 間の不変距離の2乗 ds^2 を

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}dX^{\mu}dX^{\nu} \tag{3.1}$$

と定義する．ここで $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 型空間の計量テンソルで，$-\eta_{00}=\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1$，$\eta_{\mu\nu}=0\,(\mu\neq\nu)$ である．

この不変距離を一般の系 S_1 から眺めるとどんな形に表わされるであろうか．それには前に出した dX と dx の関係を (3.1) に代入すればよい．すなわち

$$ds^2=g_{\alpha\beta}(x)\,dx^{\alpha}\cdot dx^{\beta}. \tag{3.2}$$

ここで $g_{\alpha\beta}$ は S_1 から眺めたときの時空の**計量テンソル**といわれ，

$$g_{\alpha\beta}(x)=\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}(x)}{\partial x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial X^{\nu}(x)}{\partial x^{\beta}} \tag{3.3}$$

のことである．

この $g_{\alpha\beta}(x)$ は座標系 S_1 の選び方によっても変わり，また重力場のようすにも関係することがわかる．まず，S_1 を他の座標系 S_2 に変えたとする．すなわち，S_1 から見たとき座標が x^{μ} である点を，S_2 からみたときの座標を $x^{\mu'}$ とする．x と x' の間には連続な関数関係があると考えてよいから，

$$dx^{\alpha}=\frac{\partial x^{\alpha}(x')}{\partial x^{\rho'}}dx^{\rho'}$$

そこで (3.2) は

$$ds^2=g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\sigma'}}dx^{\rho'}dx^{\sigma'}=g_{\rho\sigma}'(x')\,dx^{\rho'}dx^{\sigma'} \tag{3.4}$$

となる．ここで $g'_{\rho\sigma}(x')$ とは

$$g_{\rho\sigma}'(x')=g_{\alpha\beta}(x)\cdot\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\sigma'}} \tag{3.5}$$

のことである．(3.4) と (3.2) を比べてみると，不変距離の２乗は S_1 からみても，S_2 からみても同じ形式で表わされていることがわかる．ただ異なるのは，係数 $g_{\alpha\beta}$ が異なるだけで，それは (3.5) なる関係で結ばれている．このように ds^2 の形式が座標系の選び方に無関係にいつも同じであるということは，一般相対性原理の要求に合致したものである．あとで説明するように，座標変換 $x^\mu \to x^{\mu'}$ に応じて，ある x の関数 $g_{\alpha\beta}$ が

$$g_{\alpha\beta}(x) \to g_{\alpha\beta}'(x')$$

のように変換されたときに，$g_{\alpha\beta}$ と $g_{\alpha\beta}'$ との間に (3.5) のような関係のあるものを**テンソル**（くわしくは２階共変テンソル）と呼ぶ．

このように座標系 S_1 を変えれば $g_{\alpha\beta}(x)$ の形も変わるから，いま S_1 を上手に選べば，時空の全体にわたって，不変距離が Minkowski 型にできるかもしれない．もしもこのようなことが可能ならば，これは重力がはじめから全然存在しなかった場合に相当する．この場合には，計量テンソル g が x の関数となったのは，座標系 S_1 の取り方がまずかったためである．たとえば，一様な重力場が空間全体にひろがっているときは，適当な加速度系に乗り移れば，この重力場を空間全体から，一挙に消し去ることができる．これに反して，一般には，重力場は空間的にも時間的にも一様ではないから，宇宙全体から一挙に重力場を消し去ることができるような，ぐあいのよい系を作るわけにはいかない．この後者のような重力場を**永久重力場**とか**真の重力場**と呼ぶ．つまり，等価原理によれば，重力場と，加速度運動に起因する見かけの力とは同じであるとはいったが，それはあくまで局所的に見た場合のことである．大局的に時空の大きな領域にわたって考えれば，この両者は異なるものである．

以上述べたことから $g_{\alpha\beta}(x)$ は重力場と関係があることがわかるが，これについては次の節で述べよう．

§4. 時空の計量テンソルと重力

$g_{\alpha\beta}(x)$ と重力場との関係をもっとはっきりさせるために，次のような簡単な例を考えよう．いま地球上のある場所で自由落下するエレベーターを考え，この中に固定した直交系を S とする．これは明らかにその場所における局所慣性系である．また，地上に固定した直交系を考えこれを S_1 とする．S の時刻 $T=0$ のときに，S_1 の時計は $t=0$ となるようにする．このとき S の座標原点は，S_1 からみたときに $x^1=x^2=0$, $x^3=h$ のところにあるとする．いま，時空内の任意の１点（ただしこの場所の近くにあるとする）を S からみたときの座標を X^μ，S_1 からの座標を x^μ とすると，重力の加速度を g として，

§ 2 の例と同じように

$$X^{\mu} = x^{\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2) \quad \text{および} \quad X^3 = x^3 - \left\{ h - \frac{g}{2} \frac{(x^0)^2}{c^2} \right\} \qquad (4.1)$$

なる関係がある．

そこで，近接した2つの時空点の間の距離 ds^2 は，S および S_1 からみると，次のように2通りに書ける．

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu} = g_{\alpha\beta}(x) \cdot dx^{\alpha} \cdot dx^{\beta}.$$

ここで，$g_{\alpha\beta}(x)$ は (4.1)，(3.3) により次のようになる．

$$\left. \begin{aligned} & g_{00}(x) = -1 + (gx^0)^2/c^4, \qquad g_{03}(x) = gx^0/c^2 \\ & \text{その他の } g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \qquad (4.2)$$

いま，S の原点に固定された質点を考えよう．これが S_1 からみて時間 $dt = dx^0/c$ の間に，dx^3 だけ落下したとすると，dt と dx^3 との関係は (4.1) の $X^3 = 0$ とおけば求められる．すなわち

$$dx^3 = -(gx^0/c^2) \cdot dx^0 \qquad \text{または} \qquad x^3 = h - g(x^0)^2/2c^2 \qquad (4.3)$$

である．これらを上の ds^2 に代入すれば，この質点が dt の間に落下した不変距離が求められる．

ところで，この質点に働く Newton の重力ポテンシャル Φ は，S_1 からみて，高さ $x^3 = h$ の所で $\Phi = 0$ となるようにすると，

$$\Phi(x) = g \cdot (x^3 - h)$$

となる．これに (4.3) を代入すると，質点の落下する道筋にそって

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2c^2}(gx^0)^2$$

とも書ける．これを (4.2) に代入して

$$g_{00}(x) = \eta_{00} - \frac{2}{c^2}\Phi(x) \qquad (4.4)$$

となる．このような簡単な例では重力のポテンシャル Φ は g_{00} および g_{03} にのみ関係するが，もっと一般の場合には $g_{\alpha\beta}(x) - \eta_{\alpha\beta}$ が重力のポテンシャルの役目をすることが容易に想像できよう．Newton の理論では重力のポテンシャルはスカラー量 Φ であったが，一般相対性理論では 10 個の成分をもつテンソル量で示されることになる．

S_1 系から眺めたときに，時空の幾何学的性質が Minkowski 型の時空とどれだけちがうかということは，$g_{\alpha\beta}(x) - \eta_{\alpha\beta}$ で示される．そこで，この量を仮に時空の歪みと呼ぶことにすると，前にも述べたように，この歪みは，座標系の選び方によって起こる見かけ

の歪みと，ほんとうに時空が歪んでいる場合とがある．そのいずれの場合でも，この歪みは物理的には重力のポテンシャルに対応するから，結局，重力ポテンシャルには見かけのものと本物とがあることになる．この後者こそ§3で述べた永久重力場といわれるものである．

このように重力ポテンシャルを幾何学的に解釈ができるのは等価原理のおかげである．Riemann 幾何学のおしえるところにしたがえば，Lorentz 変換に対して共変な数式を，$g_{\alpha\beta}$ を導入することによって，一般座標変換に対しても共変な形式に書き直すことは常に可能である（これについては後で説明しよう）．それゆえに，一般相対性原理だけでは，物理法則を単に一般共変形に書いたというだけで，物理的にはなんら新しい事実は出てこない．その際に $g_{\alpha\beta}(x)$ を重力ポテンシャルと結びつけるからこそ，一般共変形への書き換えが単なる数学的な書き換えではなくて，重力場との相互作用を数式化したことになるのである．これは全く等価原理の功績であるから，Einstein の理論を一般相対性理論と呼ぶのは片手落ちである．

第II章　テンソル解析

§5.　4次元連続体

第I章で説明したように，われわれはこれからは単に Lorentz 変換ばかりでなく，もっと一般の座標変換をも考えなくてはならない．一般相対性原理にしたがえば，このような一般の変換に対しても，物理法則の数学的形式は不変でなくてはならない．そこで，この原理にしたがうように法則を数学的に表わすためには，まず各種の物理量が座標変換に応じてどのように変換されるかを知る必要がある．ところで，このような各種の量の変換の仕方を議論するのに便利な数学的手段がある．それがテンソル解析である．

テンソル解析を数学的に厳密に詳述することは本書の目的ではないから，ここではあとから必要になることだけを概説することにする．特にだいじな定理の証明や，いささかめんどうすぎる数学的事項は巻末の付録にゆずる．

さて，これからわれわれが問題にする物理的対象は，すべてある時刻に，空間の中の1点で起こるものである．この時間と空間は，特殊相対論でも一般相対論でも切り離して考えないで，むしろ一緒にして4次元的にひろがった連続体と考えられている．つまり，すべての物理的対象は，**“時空”**と呼ばれるこの**4次元連続体***)の中にある．比喩的にいえば，いろいろの物体と呼ばれる役者が演ずる物理現象といわれる劇は，すべてこの4次元連続体という舞台の中で行なわれるわけである．

ところでこの舞台のどこに役者がいるかを示すのに便利なように，前もって舞台の各点にそれぞれ所番地をわりふっておく必要がある．われわれの舞台は4次元連続体であるから，4個の数の組(x^0, x^1, x^2, x^3)を各点毎にそれぞれわりあてねばならない．この数の組 x^μ $(\mu=0, 1, 2, 3)$ をその点の**座標**と呼ぶ．各点に座標をわりあてるのは各点を識別するのが目的であるから全く勝手にわりあててもかまわない．しかし互いにごく接近した2点**)の座標はほとんど等しく，ごく僅かしか違わないようにするのが便利である．つま

---

*) これは英語でいう **continuum** のことである．

**) ここでは“近傍”という概念についてはまだ定義してないから“接近した2点”ということばは厳密にはなんのことか意味がわからない．そこでこの問題の点のまわりは仮りにユークリッド空間と考えて既に各点の間の距離はわかっているものとする．この議論は深く立入ると長い説明が必要となるから，このような常識的な“遠近”の説明にとどめておく．

り座標値は連続的にわりあててあるものとする．また，異る点の座標は異るようにして，点と座標の1対1の対応を仮定する． ここで注意しておくが座標が x^μ の点と， 座標が $x^\mu + dx^\mu$ の点との間の距離が幾らかということについてはまだなにも決めてない．市街の各地点に番地をわりふることは，各地点間の距離とは一応関係のないことである．

連続体内の各点にそれぞれ座標をわりあてると，点の集合と座標値の集合との間に1つの決まった対応関係ができたことになる．この座標の“わりあて方”を**座標系**という*)．座標系が変わるということは，各点にわりあてる座標値を変えることにほかならない．

座標値のわりあて方は全く勝手であるから座標系の変換も全く勝手でよいが，ただ次の制限は必要である．すなわち任意の1点のもとの座標を x^μ $(\mu=0, 1, 2, 3)$，同じ点の新しい座標を $x^{\mu'}$ とするとき，x^μ と $x^{\mu'}$ との間には次のような関数関係があるとする．

$$x^{\mu'} = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (\mu=0, 1, 2, 3) \tag{5.1}$$

この4個の関数 f^μ は， そのすべての変数 $x^\rho\,(\rho=0, 1, 2, 3)$ について連続で， 1回までは微分可能とする． また， 新しい4個の座標値 $x^{\mu'}$ が互いに独立であるためには，次のような関数行列式に対する条件が必要である．

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \equiv \frac{\partial(x^{0'}, x^{1'} \cdots x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, \cdots x^3)} \neq 0 \tag{5.2}$$

§6. スカラー，ベクトル，テンソル

物理学で考えられる量の中で，数学的に最も簡単なものはスカラー量である．一般に，ある1つの量の値が座標系の決め方に無関係で一定の値をもつとき，この量を**スカラー**という．もし時空内の各点ごとにそれぞれ決まった値をもつ量があって，しかもこの各点の値は座標系の取り方に無関係のとき， このような量を**スカラー場**という． スカラー場は，時空点を決めればそこにおける場の値が決まるから，座標系を決めると場の量は座標の1つの決まった関数となる．これを $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$，または略して $\varphi(x)$ と書くことにする．各点における φ の値が座標変換しても変わらないことは，数式で次のように書ける．いま，(5.1) で表わされるような座標変換 $x \to x'$ を考えよう．これは (5.2) のような条件があるから， 必ず逆に各 x を $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ の関数として書き表わすことができる．それを

$$x^\mu = g^\mu(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \quad (\mu=0, 1, 2, 3)$$

---

*) 全時空をただ1つの座標系でおおいつくす必要はない．時空のある部分は1つの座標系で，他の部分はそこに適した別の座標系で表わすようにしてもかまわない．この場合両方の“部分”の重なった共通部分は，2組の座標値をあたえられることになる．

と書こう．そうすると $\varphi(x)$ は次のように書き換えられる．

$$\varphi(x)=\varphi\{g^0(x'),\ g^1(x'),\ g^2(x'),\ g^3(x')\}$$

$\varphi(x)$ を上のように書き換えると，これは $(x^{0'},\ x^{1'},\ \cdots,\ x^{3'})$ の関数と考えられる．しかし，φ を x' の関数と考えたときの関数形は，φ を x の関数と考えたときの関数形とは異なるのが普通であるから，このちがいをはっきりさせるために

$$\varphi\{g^0(x'),\ \cdots,\ g^3(x')\}\overset{d}{\equiv}\psi(x^{0'},x^{1'},\cdots,x^{3'})\overset{d}{\equiv}\psi(x') \tag{6.1}$$

と書くことにしよう．上の式は ψ を定義する式であるから $\overset{d}{\equiv}$ を使った．一般に "B を A という字であらわす" ということを $A\overset{d}{\equiv}B$, または場合によっては $B\overset{d}{\equiv}A$ と書くことにする．一方，新しい座標系を基準にして，同じ量の分布状態を調べたところが，それが x' の関数 $\varphi'(x^{0'},\ x^{1'}\cdots x^{3'})\overset{d}{\equiv}\varphi'(x')$ によって表わされたとする．もしも各点で

$$\psi(x^{0'},x^{1'},\ \cdots,x^{3'})=\varphi'(x^{0'},x^{1'},\ \cdots,x^{3'}) \tag{6.2}$$

が成り立つときは，この量 $\varphi(x)$ をスカラーという．(6.1) は単なる書き換えで，これはスカラーであろうとなかろうといつでも成り立つ恒等式である．それに対して (6.2) は φ がスカラーのときに満足すべき条件式である．(6.2) と (6.1) を一緒にして φ がスカラーであるためには

$$\varphi(x)=\varphi'(x')$$

でなければならない．この式の点 x と点 x' とは同じ時空点であることを注意しておく．

次にベクトルの定義をしよう．いま 4 個の関数 $\{A^0(x),\ A^1(x),\ \cdots,\ A^3(x)\}$，または簡単に $\{A^\mu(x)\}$ を考える．座標変換 $x\to x'$ を行なった時に，新しい座標系では上の 4 個の量が $\{A^{\mu\prime}(x')\}$ で表わされるとする．もしこの両方の組の間に，各 μ について

$$A^{\mu\prime}(x')=(\partial x^{\mu\prime}/\partial x^\nu)\cdot A^\nu(x) \qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{6.3}$$

という関係が成り立つときは，この 1 組の量 $\{A^\mu(x)\}$ を **反変ベクトル**，または **反変ベクトル場** という．また，$A^0,\ A^1,\ \cdots,\ A^3$ のそれぞれをこの **反変ベクトルの成分** と呼ぶ．

いま，時空内に任意の 1 点 P（その座標を x^μ）と，そのすぐ隣りに点 Q（その座標を $x^\mu+dx^\mu$）を考える．これら 2 点の座標の差 dx^μ は反変ベクトルの最も簡単な例である．なぜかというと，新しい座標系での Q と P との座標の差 $dx^{\mu\prime}$ は，次のように書くことができる．

$$dx^{\mu\prime}=\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}\cdot dx^\nu$$

ここで dx^μ を $A^\mu(x)$ に対応させれば (6.3) と全く同じ関係式が成り立つことが判る．

スカラー場 $\varphi(x)$ の 4 次元的勾配

$$\varphi,_{\mu}(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}} \qquad (\mu=0,1,2,3)$$

は，変換 $x \to x'$ に対して次のようになる．

$$\varphi',_{\mu}(x') \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x^{\mu\prime}} = \frac{\partial\varphi'\{f(x)\}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}(x')}{\partial x^{\mu\prime}} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}}$$

$$= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}} \varphi,_{\nu}(x)$$

この関係式は (6.3) とはちがったものであるから，4個の量 $\{\varphi,_{\nu}(x)\}$ は反変ベクトルとはいえない．

いま，4個の関数 $B_{\mu}(x)$ ($\mu=0,1,2,3$) で1組となっている量がある．これが座標変換されたのちには $B'_{\mu}(x')$ となったとする．もし

$$B'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}} B_{\nu}(x) \tag{6.4}$$

という関係式が成り立つときは，この $\{B_{\mu}(x)\}$ は**共変ベクトル**，または**共変ベクトル場**と呼ばれる．上に考えた $\varphi,_{\mu}(x)$ はまさにこの例である．この2種類のベクトルは添字の位置で区別される．上に添字がついた量は反変ベクトルであり，下についているものは共変ベクトルである．しかしここに例外がある．x^{μ} 自身は上に添字をもっているが，これは (6.3) のような変換規則にしたがわないからベクトルではない．x^{μ} をベクトルと考えることができるのは，特殊相対論で考えたような1次変換のときに限る．このことはよく注意する必要がある．

上に説明した種類のベクトルという概念は，容易に次のように一般化できる．いま，2個の添字をもった関数 $T^{\mu\nu}(x)$ を考えよう．この μ, ν はどちらも (0, 1, 2, 3) のいずれかの値をとるものとすると，この関数は全部で 16 個ある．これが，座標変換 $x \to x'$ につれて

$$T^{\mu\nu}(x) \to T^{\mu\nu\prime}(x')$$

に移ったとする．つまり新しい座標系で同じ量を眺めた時に，それの 16 個の成分は新しい関数 $T^{\mu\nu\prime}(x')$ で表わされるとする．この新旧両方の T の間に各 μ, ν について

$$T^{\mu\nu\prime}(x') = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{a}} \cdot \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{b}} T^{ab}(x)$$

という関係が成り立つとき，この $T^{\mu\nu}(x)$ の全体を**反変テンソル**という．特に添字が2個であるから，くわしくいうと**2階反変テンソル**と呼ばれる．

この定義から，共変テンソルの定義もすぐに想像できるであろう．2個の添字をもった関数 $S_{\mu\nu}(x)$ が，座標変換によって $S_{\mu\nu}'(x')$ になったとする．もし

$$S_{\mu\nu}{}'(x')=\frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{\nu'}}S_{mn}(x)$$

が成り立つならば，$S_{\mu\nu}(x)$ は **2 階共変テンソル**と呼ばれる．

全く同じように $U^\mu{}_\nu(x)$ が変換によって $U^\mu{}_\nu{}'(x')$ になったとして，

$$U^\mu{}_\nu{}'(x')=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}U^\alpha{}_\beta(x)$$

という関係を満足するものとする． このとき $U^\mu{}_\nu(x)$ は **2 階混合テンソル**と呼ばれる．

2 階混合テンソルの例としては

$$\delta^\mu_\nu=\begin{cases}1 & (\mu=\nu \text{ のとき})\\ 0 & (\mu\neq\nu \text{ のとき})\end{cases}$$

がある．新しい座標系からみたときのこのテンソルを $\delta^{\mu\prime}_\nu$ とすると，テンソルの定義から次の関係が成り立つ．

$$\delta^{\mu\prime}_\nu=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\cdot\delta^\alpha_\beta=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}}=\delta^\mu_\nu$$

この関係式から， δ^μ_ν は座標変換によってもその各成分の値が変わらないことがわかる．このようなことは一般には成り立たないもので，δ^μ_ν の特別な性質である．

いままで述べてきたことは，添字のもっと多い場合にも容易に拡張できる．一般に，n 個の添字をもった量が次のような関係式を満足するとき，それを n 階テンソルと呼ぶ．たとえば， n 個の添字をもった量の， x-座標系および変換された新しい x'-座標系での各成分をそれぞれ

$$T^{\mu\nu\cdots\rho}_{\alpha\beta\cdots\gamma}(x) \quad \text{および} \quad T^{\mu\nu\cdots\rho\prime}_{\alpha\beta\cdots\gamma}(x')$$

とする．これらのあいだに

$$T^{\mu\nu\cdots\rho\prime}_{\alpha\beta\cdots\gamma}(x')=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^n}\cdots\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^a}{\partial x^{\alpha'}}\cdot\frac{\partial x^b}{\partial x^{\beta'}}\cdots\frac{\partial x^c}{\partial x^{\gamma'}}\cdot T^{mn\cdots p}_{ab\cdots c}(x) \qquad (6.5)$$

という関係が成り立つときに，この T は ***n* 階テンソル**と呼ばれる．

この定義からわかるように，1 階テンソルとはベクトルのことであり，スカラーは 0 階テンソルにほかならない．

いままで述べてきた定義はすべて Lorentz 変換の場合の定義とよく似ているが， 実は大きなちがいがある．Lorentz 変換は座標系の 1 次変換で，それは

$$x^{\mu'}=a^\mu{}_\nu\cdot x^\nu,\qquad a^\mu{}_\nu=(x \text{ に無関係})$$

のような変換である．それゆえ Lorentz 変換では (6.5) は

$$T^{\mu\nu\cdots\rho'}_{\alpha\beta\cdots\gamma}(x') = a^{\mu}{}_{m} \cdot a^{\nu}{}_{n} \cdots a^{\rho}{}_{p} \cdot a_{\alpha}{}^{a} a_{\beta}{}^{b} \cdots a_{\gamma}{}^{c} \cdot T^{mn\cdots p}_{ab\cdots c}(x)$$

となる.*) これはまさに Lorentz 変換に対するテンソルの変換式にほかならない. この変換式では T' と T とは，場所 x に無関係に，任意の場所で同じ定数係数をもった1次関係式で結ばれている. これに反して，一般相対論で考えるような一般の座標変換では，$\partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}$ は x の関数である. したがって，(6.5) からわかるように，T' と T との1次関係式にでてくる係数は場所ごとにちがう値をもつ.

これは両方の場合の大きなちがいで，このためにいろいろとめんどうなことが起きる. これについてはあとで順に説明していく.

これまで述べてきたことからわかるように，Lorentz 変換のときと同じように，一般座標変換の場合にも，テンソルの掛算，縮約が定義できる. たとえば，2つのテンソル $A^{\mu\nu}(x)$ と $B^{\rho}{}_{\sigma}(x)$ の積を

$$C^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\mu\nu}(x) B^{\rho}{}_{\sigma}(x)$$

と書くと，このように定義された C は一般座標変換に対して，その添字の示すような変換性を持っていることが容易にわかる. この C のことを A と B との**直積**とか，**テンソル積**という. この例で，上の添字の1つ，たとえば ν を，下の添字 σ と等しくして，0から3まで和をとった結果を

$$D^{\mu\rho}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\mu\sigma}(x) B^{\rho}{}_{\sigma}(x)$$

と書くと，この D はその添字の示すように，2階の反変テンソルであることが容易に証明できる. このように上下の添字の1組を等しくとって，0から3まで和をとることをテンソルを**縮約**するという. 縮約によってもとのテンソルの階数が2つさがることはいうまでもなかろう.

次のこともテンソル算でたいせつな定理である. たとえば，いま3個の添字をもった量 $X^{\mu\nu}{}_{\rho}(x)$ があったとする. 3個の全く勝手なベクトル A_{μ}, B_{ν}, C^{ρ} をもってきてこの X との直積をつくり，それを縮約して

$$S(x) = X^{\mu\nu}{}_{\rho}(x) \cdot A_{\mu} B_{\nu} C^{\rho}$$

とおく. もしこの $S(x)$ がスカラーであることが証明できたとすると，もとの $X^{\mu\nu}{}_{\rho}(x)$ は，実は3階混合テンソルでなければならない.

テンソルの和と差も Lorentz 変換の場合と同じように定義できる. いま，2個の同種の

---

*) 特殊相対論ですでに知っていることと思うが，$a_{\alpha}{}^{a}$ は $a_{\alpha}{}^{a} \cdot a^{\alpha}{}_{b} = \delta^{a}_{b}$ で定義されるものである.

テンソルを $A^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma}$ および $B^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma}$ とする．また，c_1，c_2 は定数とするとき，$D^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma}$ を

$$c_1 A^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} + c_2 B^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} \stackrel{d}{\equiv} D^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma}$$

で定義する．もしもわれわれが Lorentz 変換だけを考えることにすれば，たとえ A は時空内の点 x における量で，B は他の点 y における量であっても，上に定義された D は A, B と同じ種類のテンソルになる．しかし，もし一般座標変換を考えるときは，点 x におけるテンソルの変換係数（つまり (6.5) の $\partial x'/\partial x$ のような量）と，点 y におけるそれとはちがうから，D は簡単なテンソルの変換規則にしたがわない．このことは一般座標変換のめんどうな特徴である．

さて，一般相対論で取扱われるすべての物理量を，いままで述べてきたスカラー，ベクトルや各種のテンソルのなかのどれかで表わすことができたならば，物理法則を一般相対性原理の要求にしたがうように数式化することは容易である．物理法則は一般に，結局のところ 2 つの別々の量のあいだの等式で表わされる．いまそれを

$$A = B \quad \text{または} \quad A - B = 0$$

とする．上に述べたテンソルの和についての注意から，次のことがすぐにわかる．すなわち，この等式がいかなる座標系でも成立するためには，A, B 両方とも同種のテンソル（スカラー，ベクトルをも含めた広い意味のテンソル）で，しかも時空内の任意の 1 点における量でなければならない．もし A と B とがちがった点における量のときは，この等式は座標系を変えると成立しなくなるからである．

§ 7. テンソルの積分，密度量

§ 6 でたびたび注意したように，一般に別々の時空点におけるベクトルやテンソルについては，たとえ各点における量が同種のテンソルであったとしても，それらの和や差は簡単な変換性をもたない．それゆえに，このような和（または差）を考えることは無意味である．たとえば，ベクトル場 $A^\mu(x)$ について，積分

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} A^\mu(x)\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

を考えてみよう．たとえこの積分が収束しても，この 4 個の積分の答は，反変ベクトルの性質をもたない．また，スカラー場 $S(x)$ を考えよう．このときも積分

$$J = \iiiint S(x)\,(dx)^4$$

はスカラーではない．ここで，めんどうであるから，次のような略号を使った．

$$(dx)^4 \overset{d}{\equiv} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

上の積分の答 J は定数ではあるが，その値は座標系の取り方により変わる．そこで逆に積分がスカラーになるためには，被積分関数はどのような量であればよいかを考えよう．

いま，積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int \mathfrak{S}(x)\,(dx)^4$$

が収束するとして，しかもこの I がスカラーであるとする．その場合に被積分関数 $\mathfrak{S}(x)$ の変換性を調べてみよう．座標変換 $x \to x'$ を行なうと，$\mathfrak{S}(x)$ は

$$\mathfrak{S}(x) \to \mathfrak{S}'(x')$$

という変換をうけるものとする．I はスカラーであるから

$$I' \overset{d}{\equiv} \int \mathfrak{S}'(x')\,(dx')^4 = \int \mathfrak{S}(x)\,(dx)^4 \overset{d}{\equiv} I$$

また，よく知られているように

$$(dx')^4 = \frac{\partial(x^{0'},\ \cdots,\ x^{3'})}{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)}(dx)^4 \overset{d}{\equiv} \frac{\partial(x')}{\partial(x)}(dx)^4$$

という関係が成立する．そこで

$$\int \left\{ \mathfrak{S}'(x')\frac{\partial(x^{0'},\ \cdots,\ x^{3'})}{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)} - \mathfrak{S}(x) \right\}(dx)^4 = 0$$

となる．このことから，もし $\mathfrak{S}(x)$ が

$$\mathfrak{S}'(x')\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \mathfrak{S}(x) \qquad (7.1)$$

または，書き換えて

$$\mathfrak{S}'(x') = \frac{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)}{\partial(x^{0'},\ \cdots,\ x^{3'})}\mathfrak{S}(x) \qquad (7.1)'$$

という関係式を満足するならば I はスカラーとなる．(7.1)′ のような関係を満足する量 $\mathfrak{S}(x)$ を**スカラー密度**という．

この密度という概念は次のように拡張できる．n 個の添字をもった量 $\mathfrak{A}^{\mu\nu\cdots}{}_{\alpha\beta\cdots}(x)$ が座標変換後に $\mathfrak{A}^{\mu\nu\cdots}{}_{\alpha\beta\cdots}{}'(x')$ になったとする．これらのあいだに

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu\cdots}{}_{\alpha\beta\cdots}{}'(x') = \frac{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)}{\partial(x^{0'},\ \cdots,\ x^{3'})}\cdot\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^n}\cdots\frac{\partial x^a}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^b}{\partial x^{\beta'}}\cdots\mathfrak{A}^{mn\cdots}{}_{ab\cdots}(x) \qquad (7.2)$$

という関係が成立するときは，この $\mathfrak{A}$ を **n 階テンソル密度**という．テンソル密度とテンソルのちがいは，(7.2) の右辺の係数に座標変換のための関数行列式 $\partial(x)/\partial(x')$ が

現われるか，そうでないかということだけである.

さて，スカラー密度という概念は，これまで考えてきたスカラーとかテンソルとちがった全く新しい概念かというと，そうではない．いま，4階完全反対称共変テンソル

$$A_{\lambda\mu\nu\rho}(x)$$

を考えよう．完全反対称とは，4個の添字のうちの任意の2個を入れ換えると，必ずその値が符号を変えるようなテンソルのことである．そこでいま

$$A_{0123}(x) \overset{d}{\equiv} \mathfrak{A}(x)$$

と書くことにすれば，もとのテンソルは

$$A_{\lambda\mu\nu\rho}(x) = \begin{cases} +\mathfrak{A}(x) : \text{添字 } (\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) \text{ が } (0,1,2,3) \text{ から偶置換で作りだすことができるとき} \\ -\mathfrak{A}(x) : (0,1,2,3) \to (\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) \text{ なるならびかえが奇置換のとき} \\ 0 \qquad\quad : \text{上の2つの場合以外のとき} \end{cases}$$

のように表わされる.

ここで座標変換を考えると，A がテンソルであるから

$$A'_{\lambda\mu\nu\rho}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x^{\nu'}} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x^{\rho'}} \cdot A_{lmnp}(x)$$

特に

$$A'_{0123}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{3'}} A_{lmnp}(x)$$

$$= \frac{\partial(x^0, \cdots, x^3)}{\partial(x^{0'}, \cdots, x^{3'})} \cdot A_{0123}(x) \tag{7.3}$$

ところで $A'_{\lambda\mu\nu\rho}(x')$ もまた完全反対称であることはすぐにわかるから，A と同じように

$$A'_{\lambda\mu\nu\rho}(x') \overset{d}{\equiv} \begin{cases} +\mathfrak{A}'(x') : (0\,1\,2\,3) \to (\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) \text{ が偶置換のとき} \\ -\mathfrak{A}'(x') : (0\,1\,2\,3) \to (\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) \text{ が奇置換のとき} \\ 0 \qquad\qquad : \text{上の場合以外のとき} \end{cases}$$

とおけば，(7.3) は

$$\mathfrak{A}'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \mathfrak{A}(x) \tag{7.3$'$}$$

となる．この式は $\mathfrak{A}(x)$ がスカラー密度であることを示す．つまり，4階反対称テンソルは4個の添字をもっているが，その0でない成分は結局は $\pm\mathfrak{A}(x)$ にほかならないか

ら，考え方を変えると，ただ1個の成分の量ともいえる．しかし，その1個の量 $\mathfrak{A}(x)$ はスカラーではなくて，スカラー密度の変換性をもっていることが，その特徴である．

これに関連して，非常におもしろいしかも重要なテンソル密度 $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ について述べよう．この ϵ は4階完全反対称反変テンソル密度で，次のように定義されるものである．

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \overset{d}{\equiv} \begin{cases} +1 : (0,\ 1,\ 2,\ 3) \to (\lambda\ \mu\ \nu\ \rho) \text{ が偶置換のとき} \\ -1 : (0,\ 1,\ 2,\ 3) \to (\lambda\ \mu\ \nu\ \rho) \text{ が奇置換のとき} \\ 0 \quad : \text{その他の場合} \end{cases} \tag{7.4}$$

この ϵ の座標変換後の成分を ϵ' とすると，テンソル密度であるから

$$\epsilon^{0123'} = \frac{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)}{\partial(x^{0'},\ \cdots,\ x^{3'})} \cdot \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^p} \cdot \epsilon^{lmnp}$$

$$= \frac{\partial(x^0,\cdots,x^3)}{\partial(x^{0'},\cdots,x^{3'})} \cdot \frac{\partial(x^{0'},\ \cdots,\ x^{3'})}{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)} \cdot \epsilon^{0123} = \epsilon^{0123} = 1$$

一般に

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho'} = \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$$

が証明できる．つまり，このテンソル密度の各成分は前の例 $A_{\lambda\mu\nu\rho}(x)$ とちがってスカラーである．一般にその成分の値が定数で，しかも座標変換でも，その成分の値が変わらないようなテンソルは1つの例外を除いては存在しない．この例外とは §6 で述べた δ^μ_ν である．しかしいまもう1つの例外として，テンソル密度 ϵ があることを知ったわけである．

この ϵ を使うとテンソルからテンソル密度を作ることができる．たとえば共変ベクトル $A_\mu(x)$ を考えよう．

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} A_\rho(x) \overset{d}{\equiv} \mathfrak{A}^{\lambda\mu\nu}(x)$$

をもって $\mathfrak{A}^{\lambda\mu\nu}$ を定義すると，この $\mathfrak{A}$ は3階反対称反変テンソル密度である．この上の定義式の意味は次のようなことである．共変ベクトルの成分 $A_3(x)$ を $\mathfrak{A}^{012}(x)$ と書いて，これを3階反対称テンソル密度の1つの成分と考えてよろしいということである．この場合に，A_3 を $\mathfrak{A}_{012}$ と考えることはできない．それはこの結びつきが座標変換をすると破られるからである．

全く同じように，2階，3階および4階の反対称共変テンソルをそれぞれ

$$A_{\mu\nu}(x),\ A_{\mu\nu\rho}(x),\ A_{\lambda\mu\nu\rho}(x)$$

とすると，これらに ϵ を掛けて縮約することにより

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}^{\mu\nu}(x)&\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}(x)\\ \mathfrak{A}^{\mu}(x)&\overset{d}{\equiv}\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu\rho\sigma}(x)\\ \mathfrak{A}(x)&\overset{d}{\equiv}\frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\mu\nu\rho\sigma}(x)\end{aligned}\right\}\tag{7.5}$$

のような対応する密度量を作りだすことができる．これらの定義式の意味は，要するに，反対称共変テンソルの独立な成分に番号をつける際に，そのつけ方を適当に変えれば，その成分を反変テンソル密度の成分と解釈し直すことができるということである．たとえば，$A_{\nu\rho\sigma}$ の独立な 0 でない成分は次の 4 個である．すなわち

$$A_{123},\quad A_{230},\quad A_{301},\quad A_{012}$$

この 4 個を，この順序に反変ベクトル密度 $\mathfrak{A}^{\mu}$ の成分と考えることができるということが，上の 2 番目の式の意味である．

特殊相対論でも上に述べた ϵ とか (7.5) のような関係式はよくでてくる．しかしそのときは，$\mathfrak{A}$ や $\mathfrak{A}^{\mu}$ は密度量とはいわない．これらはそれぞれ擬スカラー，擬ベクトルと呼ばれる．一般相対論でも擬テンソルという言葉が使われるが，特殊相対論の場合とまったくちがった意味を持つ量であるから，両者を混同しないように注意すべきである．

テンソルから密度量を作るのにまた別の方法がある．いま．任意の 2 階共変テンソル $B_{\mu\nu}(x)$ を考えよう．この 2 個の添字をマトリックスの行と列を示す添字と考えて，次のような行列式 $B(x)$ を作る．

$$B(x)\overset{d}{\equiv}\begin{vmatrix}B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03}\\ B_{10} & \cdots & \cdots & B_{13}\\ \vdots & & & \\ B_{30} & \cdots & \cdots & B_{33}\end{vmatrix}\overset{d}{\equiv}\det(B_{\mu\nu})$$

座標変換後のこのテンソルを $B_{\mu\nu}'(x')$，またそれから計算される行列式を $B'(x')$ とすると，$B'(x')$ と $B(x)$ の間の関係は

$$B'(x')=\det\left\{\frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}}B_{mn}(x)\frac{\partial x^n}{\partial x^{\nu'}}\right\}\equiv\det(\tilde{X})\cdot\det(B_{mn})\cdot\det(X)$$

となる．ここに $\det(X)$ とは

$$\det(X)\equiv\frac{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)}{\partial(x^{0'},\cdots,x^{3'})}$$

のことであり，この行と列とを入れ換えた行列式が $\det(\tilde{X})$ である．そこで，行列式の性質からすぐわかるように

$$B'(x') = \left\{ \frac{\partial(x^0, \cdots, x^3)}{\partial(x^{0'}, \cdots, x^{3'})} \right\}^2 B(x)$$

つまり，

$$\sqrt{B'(x')} = \frac{\partial(x^0, \cdots, x^3)}{\partial(x^{0'}, \cdots, x^{3'})} \sqrt{B(x)} \tag{7.6}$$

この関係から，$\sqrt{B}$ はスカラー密度であることがわかる．

いままでの議論では $B_{\mu\nu}$ は任意の2階共変テンソルでよかった．しかし，ここで特に $B_{\mu\nu}$ として，2階反対称テンソル

$$A_{\mu\nu}(x) = -A_{\nu\mu}(x)$$

を考えよう．このときは

$$\det(A_{\mu\nu}) = (A_{01}A_{23} + A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12})^2,$$

すなわち

$$\sqrt{\det(A_{\mu\nu})} = |A_{01}A_{23} + A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12}|$$

となる．ところで，(7.5) の最初の定義式を使うと，上式の右辺は

$$\sqrt{\det(A_{\mu\nu})} = \frac{1}{2}|\mathfrak{A}^{\mu\nu}A_{\mu\nu}|$$

となる．(7.5) で定義された $\mathfrak{A}^{\mu\nu}$ が反変テンソル密度であるということを思い出せば，$\sqrt{\{\det A_{\mu\nu}\}}$ がスカラー密度であることは上式の右辺からも容易にわかる．

最後に1つ注意を述べよう．一般相対論では次のような ϵ は考えない．すなわち，添字について完全反対称な共変4階テンソル

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} +1 : (0\,1\,2\,3) \to (\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) \text{ が偶置換のとき} \\ -1 : \text{奇置換のとき} \\ 0 \quad : \text{その他のとき} \end{cases} \tag{7.7}$$

である．(7.7) で定義された成分は，他の座標系に移ればちがった値となる．ϵ が共変テンソルであることから

$$\epsilon'_{0123} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{1'}} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x^{2'}} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x^{3'}} \epsilon_{lmnp} = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, \cdots, x^{3'})}$$

となって，一般には ϵ' の成分は x の関数となる．つまり，この ϵ は座標系に無関係にいつでも (7.7) のような値をもつわけにはいかない．(7.7) がいつでも成立するためには ϵ は共変テンソルではなくて

$$\epsilon'_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(x^{0'}, \cdots, x^{3'})}{(x^0, \cdots, x^3)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{\rho'}} \epsilon_{lmnp}$$

のような変換性をもてばよい．しかし，この変換規則はテンソル密度の変換規則では

ない*). Lorentz 変換の場合には

$$\frac{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)}{\partial(x^{0\prime},\cdots,x^{3\prime})}=\pm 1$$

となるので，(7.7) で定義される ϵ を考えることができるが，一般相対論ではこのような奇妙な変換性をもつ量は普通には除外する．

§8. テンソルの微分

テンソルの積分がテンソルにならないと同様に，その微分もまたテンソルではない．微分とは，もともとごくわずかではあるが離れた2点における量の差に比例するものである．したがって，その変換性がはっきりしないのも当然である．それゆえ，微分した結果がまたテンソルの変換性をもつようにするのには，微分の定義を少し変える必要がある．このように変更された微分は，**共変微分**と呼ばれる．これについては，あとでくわしく説明する．

このように微分の定義を変更しなくても，普通の微分を行なった結果が，やはりテンソルであるという例外的な場合がある．たとえばスカラー量 $\varphi(x)$ を考えよう．この普通の微分

$$\varphi_{,\mu}\overset{d}{\equiv}\partial\,\varphi(x)/\partial x^\mu \tag{8.1}$$

はすでに述べたように共変ベクトルである．この節ではこのような例外的ではあるが，大事な例について述べることにする．

上に定義された共変ベクトル $\varphi_{,\mu}$ は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_{,\nu}-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi_{,\mu}\equiv 0 \tag{8.2}$$

という恒等式を満足する．

逆に，(8.2) のような関係式

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu-\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu\equiv 0$$

---

*) $T^{\mu\nu\cdots}{}_{\rho\cdots}(x)$ が座標変換に応じて $T'(x')$ に変換されたとする．もし $T(x)$ と $T'(x')$ との間に

$$T^{\mu\nu\cdots}{}_{\rho\cdots}{}'(x')=\left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right\}^k\cdot\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^m}\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^n}\cdots\frac{\partial x^p}{\partial x^{\rho\prime}}\cdots T^{mn\cdots}{}_{p\cdots}(x)$$

という関係があるときに，この T は k 次のテンソル密度（または略して k 次の密度）と呼ばれる．いままで本文で考えてきた密度量は1次の密度であり，普通のスカラーやテンソルはすべて0次の密度量である．また，(7.7) で定義される ϵ は実は（-1）次の4階共変テンソル密度である．また，$\det(B_{\mu\nu})\equiv B$ は2次のスカラー密度である．

を満足する A_μ は，実は $A_\mu=\partial\varphi/\partial x^\mu$ のように，ある適当なスカラー φ の微分に等しい．

次に任意の共変ベクトル $A_\mu(x)$ を考えよう．これから作られる4次元的 curl，$f_{\mu\nu}$，すなわち

$$f_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{8.3}$$

は f の添字が示すように，2階反対称共変テンソルである．反対称とは

$$f_{\mu\nu}(x)=-f_{\nu\mu}(x)$$

のことである．これが共変テンソルであることは，次のように容易に確かめられる．すなわち，変換後に $f_{\mu\nu}$ が $f_{\mu\nu}'(x')$ になったとすると

$$\begin{aligned}
f_{\mu\nu}'(x')&\overset{d}{\equiv}\frac{\partial A_\nu'(x')}{\partial x^{\mu'}}-\frac{\partial A_\mu'(x')}{\partial x^{\nu'}}\\
&=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}A_\beta(x)\right\}-\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}A_\alpha(x)\right\}\\
&=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}f_{\alpha\beta}(x)+\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\right)A_\beta-\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\right)A_\alpha
\end{aligned}$$

この最後の2つの項は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\lambda'}\cdot\partial x^{\nu'}}A_\beta-\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\lambda'}\cdot\partial x^{\mu'}}A_\alpha\\
&=\delta_\mu^\lambda\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\lambda'}\cdot\partial x^{\nu'}}A_\beta-\delta_\nu^\lambda\cdot\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\lambda'}\cdot\partial x^{\mu'}}A_\alpha=0
\end{aligned}$$

そこで結局

$$f_{\mu\nu}'(x')=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}f_{\alpha\beta}(x)$$

となる．

ところで，この $f_{\mu\nu}$ については

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}f_{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\mu}f_{\nu\lambda}+\frac{\partial}{\partial x^\nu}f_{\lambda\mu}\equiv 0 \tag{8.4}$$

という恒等式が成り立つ．

これまで述べてきた考え方は，さらに高階のテンソルの場合へ拡張できる．

いま任意の反対称2階共変テンソル $A_{\mu\nu}(x)\,(=-A_{\nu\mu})$ を考えよう．これを微分して作った．

$$f_{\lambda\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\partial_\lambda A_{\mu\nu}+\partial_\mu A_{\nu\lambda}+\partial_\nu A_{\lambda\mu} \tag{8.5}$$

という量は，添字 λ,μ,ν の置換に対して完全反対称な3階共変テンソルであることが容

易に証明できる．さらに，(8.5) で定義された $f_{\lambda\mu\nu}$ に対しては次のような恒等式が成り立つ．

$$\partial_\rho f_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda f_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu f_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu f_{\rho\lambda\mu} \equiv 0 \tag{8.6}$$

最後に任意の完全反対称3階共変テンソル $A_{\lambda\mu\nu}(x)$ を考えよう．これを微分することによって作られる

$$f_{\rho\lambda\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\rho A_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda A_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu A_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu A_{\rho\lambda\mu} \tag{8.7}$$

という量は，完全反対称4階共変テンソルであることも証明できる．

いままでに述べた関係式，すなわち (8.1)，(8.3)，(8.5) および (8.7) は密度量に対する関係式に翻訳できる．いま，(8.7) の両辺に (7.4) で定義された ϵ を掛けて縮約してみる．いま

$$\frac{1}{3!}\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu}A_{\lambda\mu\nu}(x) \stackrel{d}{\equiv} \mathfrak{A}^\rho(x) \tag{8.8}$$

とおく．この $\mathfrak{A}^\rho$ は反変ベクトル密度である．同様に

$$\frac{1}{4!}\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu} f_{\rho\lambda\mu\nu}(x) \stackrel{d}{\equiv} \mathfrak{F}(x)$$

はスカラー密度であることもすでに §7 で知っている．これらの量を使って (8.7) を書き換えると

$$\mathfrak{F}(x) \stackrel{d}{\equiv} \partial_\rho \mathfrak{A}^\rho(x) \tag{8.7$'$}$$

となる．つまり，反変ベクトル密度の4次元的 div を作ると，それはスカラー密度となる．同様に (8.5) の両辺に ϵ を掛けると

$$\mathfrak{F}^\rho(x) \stackrel{d}{\equiv} \partial_\lambda \mathfrak{A}^{\rho\lambda} \tag{8.5$'$}$$

となる．ここに次の定義を用いた．

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}^\rho(x) &\stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{3!}\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu} f_{\lambda\mu\nu} \\ \mathfrak{A}^{\rho\lambda}(x) &\stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2!}\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu} A_{\mu\nu} \end{aligned}\right.$$

(8.5)′ から，反対称2階反変テンソル密度を微分すると反変ベクトル密度になることがわかる．

同様にして (8.3)，(8.1) からそれぞれ次のような関係がでる．

$$\mathfrak{F}^{\rho\lambda} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu \mathfrak{A}^{\rho\lambda\mu}, \tag{8.3$'$}$$

$$\mathfrak{F}^{\rho\lambda\mu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\nu \mathfrak{A}^{\rho\lambda\mu\nu} \tag{8.1$'$}$$

いままで述べてきたことの例として Maxwell の電磁場の方程式を考えてみよう．これは2つの組に分けられる．すなわち

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0,\quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,\vec{E}=0 \tag{8.9}$$

および

$$\mathrm{div}\,\vec{D}=\rho,\quad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j} \tag{8.10}$$

である．

特殊相対論ですでに知っているように，磁束密度 $\vec{B}$, および電場の強さ $\vec{E}$ は，1つの反対称2階共変テンソル $f_{\mu\nu}$ で表わされる．すなわち

$$B_x=f_{23},\qquad B_y=f_{31},\qquad B_z=f_{12}$$
$$E_x=cf_{10},\qquad E_y=cf_{20},\qquad E_z=cf_{30}$$

のように表わすことができる．この $f_{\mu\nu}$ を使うと (8.9) は (8.4) の形に書ける．すなわち

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu}+\partial_\mu f_{\nu\lambda}+\partial_\nu f_{\lambda\mu}=0. \tag{8.11}$$

あるいは

$$\dagger\mathfrak{F}^{\rho\sigma}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2!}\,\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}f_{\mu\nu}$$

とおくと

$$\partial_\rho\dagger\mathfrak{F}^{\rho\sigma}=0 \tag{8.11$'$}$$

となる．

先に述べたように (8.11) および (8.11)′ の左辺は，それぞれ3階共変反対称テンソルならびに反変ベクトル密度である．したがってこれらの方程式は座標系の一般の変換に対してもその形が変わらない．さらに注意すべきことは，これらの式は時空内の2点間の距離の定義に無関係であるということである．

(8.10) の方程式については，次のような書き換えができる．まず，電荷，電流密度，ρ および $\vec{j}$ を1つのベクトル密度

$$\mathfrak{J}^\mu=(\mathfrak{J}^0=c\rho,\ \mathfrak{J}^1=j_x,\ \mathfrak{J}^2=j_y,\ \mathfrak{J}^3=j_z)$$

で表わし，電磁場の強さ $\vec{D}$ および $\vec{H}$ を反対称2階反変テンソル密度 $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ で次のように表わそう．つまり

$$\mathfrak{F}^{01}=cD_x,\qquad \mathfrak{F}^{02}=cD_y,\qquad \mathfrak{F}^{03}=cD_z$$
$$\mathfrak{F}^{23}=H_x,\qquad \mathfrak{F}^{31}=H_y,\qquad \mathfrak{F}^{12}=H_z$$

そうすると (8.10) は

$$\partial_\nu\mathfrak{F}^{\mu\nu}=\mathfrak{J}^\mu \tag{8.12}$$

となる．この両辺に ∂_μ をほどこすと $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ の反対称性のために

$$\partial_\mu \mathfrak{F}^\mu \equiv 0 \tag{8.13}$$

となる．これは電流の連続の方程式と呼ばれるもので，電荷の保存則にほかならない．

(8.5)′ および (8.7)′ からもわかるように，(8.12)，(8.13) は共に任意の座標変換に対してその形を変えないことがわかる．またここでも注意しておきたいことは，これらの式 (8.12)，(8.13) もまた時空内の距離の定義に無関係に成立するということである．

以上のように，Maxwell の場の方程式は2組に分かれ，それぞれの組の方程式は距離の定義に無関係に，また任意の座標変換に対して不変な形に書き表わされることがわかった．ところで，いままでの話の中では，$(\vec{E}, \vec{B})$ の組 $f_{\mu\nu}$ と，$(\vec{D}, \vec{H})$ の組 $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ とのあいだの関係については，なにもふれていなかった．

特殊相対論で Maxwell の場の理論を公式化するときには，これらの間に比例関係を要求する．つまり

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = c^2 \varepsilon_0 \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} f_{\rho\sigma} \tag{8.14}$$

という関係をおいた．ここに ε_0 は真空の電媒定数である．また，$\eta^{\mu\nu}$ は

$$-\eta^{00} = \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = 1$$

$$\eta^{\mu\nu} = 0, \qquad \mu \neq \nu$$

で定義された Minkowski 型時空の計量テンソルである．

一般に $\mathfrak{F}$ と f とを結びつけるのには，時空の計量テンソルが必要である．(8.11)，(8.12) で定義される場がどのような時空のなかにいるのかは，この結びつきの関係式によって表わされることになる．この結びつきの式は一般には (8.14) のような簡単なものでなくてもよい．この形を変えることは，(8.11)，(8.12) を満足する場の物理的性質を変えることに相当する．

話は少し変わるが，電子を点電荷と考えたときに Maxwell の理論にしたがえば，1個の電子は無限大の電磁的自己エネルギーをもつという困難がある．これは Maxwell の理論の1つの欠点と考えられる．そこで，この欠点を改良するためにいろいろの試みがなされたが，結局はこの $\mathfrak{F}$ と f との結びつきの関係式を (8.14) 以外のぐあいのよいものにしようと試みたのである．この1つの例として Born-Infeld*) の理論は有名である．

---

*) M. Born, Proc. Roy. Soc. A, **143** (1934) p. 410.
M. Born and L. Infeld, ibid. **144** (1934) p. 425.

§9. 共変微分

いままでに何度も述べたように，テンソルの微分はテンソルの変換規則にしたがわない．いま，例としてベクトル場 $A^\mu(x)$ の微分を考えてみよう．普通の定義によれば A^μ の微分は

$$\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} \stackrel{d}{\equiv} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x^\nu}\{A^\mu(x+\Delta x)-A^\mu(x)\} \tag{9.1}$$

である．この右辺の第2項は点 P（その座標を x）における A の値を示し，第1項は点Q（その度標を $x+\Delta x$）における A である．したがって，座標変換を行なったときに，この両方のAの変換の係数 $\partial x'/\partial x$ の値は Δx の程度のちがいがある．そのために，(9.1) の右辺はテンソルの変換規則にしたがわない．

この欠点を取除くためには右辺の差を，同じ点，たとえば Q における2つの量の差の形に書き直せばよい．つまり，P 点における量 $A^\mu(x)\stackrel{d}{\equiv}A^\mu(\mathrm{P})$ をある決まった方法で，しかも座標系の取り方に無関係に Q 点にまで移動させればよい．特殊相対論の場合，つまり Minkowski 型の時空においては，P から Q まで A を平行移動させ，しかもこの移動に際して A の各成分の大きさが変わらないことを仮定している．いま，P から Q まで平行移動させた結果を $A^\mu(\mathrm{Q})_{/\!/}$ で表わすと，Minkowski 型時空では

$$A^\mu(\mathrm{Q})_{/\!/}=A^\mu(\mathrm{P}) \tag{9.2}$$

という関係が仮定されている．このために (9.1) は

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^\nu}\{A^\mu(\mathrm{Q})-A^\mu(\mathrm{Q})_{/\!/}\} \tag{9.3}$$

とも書ける．

(9.2) の関係は，Minkowski 型の平坦な時空のときに限るものである．また，基準にとった座標系が Lorentz－系のような，いわば性質のよい座標系のときに限って (9.2) の関係は成り立つ．もし Lorentz 変換よりももっと一般的な変換を行なえば，(9.2) はもはやこのままの形では成り立たなくなる．それは，(9.2) が2つの異なる時空点における量の間の関係式であるからである．

そこで，(9.2) の一般化をまず考えよう．(9.2) は一般には成立しないとしても，$A(\mathrm{Q})$ と $A(\mathrm{P})$ とのちがいは，せいぜい Δx の程度の小さい量であるとしてよかろう．そこで (9.2) の代わりに

$$A^\mu(\mathrm{Q})_{/\!/}\stackrel{d}{\equiv}A^\mu(\mathrm{P})-A^\nu(\mathrm{P})\cdot\epsilon_\nu{}^\mu \tag{9.2$'$}$$

とおく．ここで ϵ はまだはっきりと定義されてないが，ともかく上に述べたように Δx の程度の小さい量である．この $A(\mathrm{Q})$ の定義式が座標系の取り方に無関係に成立するため

には，ϵ はある種の制限をうける．そのことについては後で議論する（この制限とは後で出てくる（9.8）のことである）．

(9.2)′ はベクトルAの無限小 Lorentz 変換とよく似た形をしている．Lorentz 変換のときには，$\epsilon_\nu{}^\mu = -\epsilon^\mu{}_\nu$ という関係があったが，(9.2)′ の ϵ については別にこのような制限はない．また (9.2)′ の ϵ はベクトル A には無関係と仮定する．しかしこの ϵ は一般に x には依存してよい．つまり，(9.2)′ の定義によれば，ベクトル A^μ を点PからQまで平行移動させるときに，A の各成分は ϵ の程度の変化をうけることになる．しかもその変化の大きさは一般に時空点ごとに異なる．

さて，ϵ は $\varDelta x$ の程度の小さい量であるから

$$\epsilon_\nu{}^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\cdot\varDelta x^\rho \tag{9.4}$$

と書こう．つまり (9.2)′ は

$$A^\mu(\mathrm{Q})_{/\!/} \overset{d}{\equiv} A^\mu(x+\varDelta x)_{/\!/} \overset{d}{\equiv} A^\mu(x) - A^\nu(x)\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\cdot\varDelta x^\rho \tag{9.2$'$}$$

となる．

この平行移動の定義を使うと，(9.1) の両辺に

$$A^\lambda\cdot\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{1}{\varDelta x^\nu}(A^\lambda\Gamma^\mu_{\lambda\rho}\varDelta x^\rho)$$

を加えることにより，

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + A^\lambda\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \overset{d}{\equiv} \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{1}{\varDelta x^\nu}\{A^\mu(x+\varDelta x) - A^\mu(x+\varDelta x)_{/\!/}\} \tag{9.1$'$}$$

となる．

この右辺は同じ点 Q における2つの量の差であるから，これは簡単なテンソルの変換規則にしたがう．したがって，A の単純な微分でなくて，(9.1)′ の左辺のような特別な組合せを作ったときに，それはテンソルとなる．そこで，これから

$$\nabla_\nu A^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + A^\lambda\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \tag{9.5}$$

という記号を使うことにしよう．$\nabla_\nu A^\mu$ は普通の微分概念の拡張であり，**共変微分**と呼ばれる．また，ここに用いた記号よりも $A^\mu{}_{;\nu}$ の方が一般にはよく使われる．しかしセミコロンはまぎらわしいから，本書では ∇_ν を使うことにする．

上の共変微分の定義の中に出てきた新しい量 $\Gamma(x)$ はどのような量であるかをこれから考えよう．まず，Γ は3個の添字をもっているが，これはテンソルではないことが次のようにして示される．

すでに述べたように，(9.1)′ の左辺はテンソルであるはずである．いま，変換したあとで $\nabla_\nu A^\mu$ が

$$\nabla_\nu' A^{\mu'}(x') \overset{d}{\equiv} \frac{\partial A^{\mu'}(x')}{\partial x^{\nu'}} + A^{\lambda'}(x')\Gamma^{\mu'}_{\lambda\nu}(x') \tag{9.6}$$

になったとする．これがテンソルであるということから

$$\nabla_\nu' A^{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\nabla_\beta A^\alpha(x) \tag{9.7}$$

という関係が成立しなくてはならない．

一方，(9.6) の右辺は次のように書きかえられる．

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial A^\alpha(x)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\cdot A^\alpha + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha}\Gamma^{\mu'}_{\lambda\nu}\cdot A^\alpha.$$

これが (9.7) の右辺と一致するためには，次の式が成り立たねばならない．

$$\left(\Gamma^{\mu'}_{\lambda\nu}(x')\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\right)A^\alpha = 0.$$

この関係が A に無関係に成立するためには（　　）自身が 0 でなければならない．この結果に $\partial x^\alpha/\partial x^{\rho'}$ を掛けて，α について和をとると

$$\Gamma^{\mu'}_{\rho\nu}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\rho'}}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\rho'}} \tag{9.8}$$

という Γ の変換規則がでてくる．

(9.8) の右辺の第 2 項がなければ Γ' と Γ との関係はちょうど 3 階の混合テンソルの関係式になっている．たとえば，Lorentz 変換を考えてみよう．そのときは，

$$\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$$

が成り立つから，Lorentz 変換に対しては，Γ はその添字の示すようなテンソルとなる．しかし，一般には (9.8) の第 2 項は 0 とはならないから，Γ はテンソルではない．このような量 Γ を**アフィン係数**とか**擬似接続係数**と呼ぶ．

いままで述べてきたことからわかるように，アフィン係数が満足しなければならない条件は，(9.8) という変換規則だけである．もし (9.8) を満足する量が，なんでもよいが，あったとすれば，それをアフィン係数として用いて，1 つの共変微分法を定義することができる．もしアフィン係数として他の量を用いれば，共変微分の内容もそれにつれて別のものになる．

ここで 1 つ注意すべきことがある．いま

$$2A^{\mu}_{\rho\nu} \overset{d}{\equiv} \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \overset{d}{\equiv} -2A^{\mu}_{\nu\rho}$$

という量の変換性を調べてみよう．これは (9.8) を使って，

$$A^{\mu'}_{\rho\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\rho'}}A^{\lambda}_{\alpha\beta} \tag{9.8$'$}$$

という変換規則にしたがうことがすぐにわかる．つまり Γ はテンソルではないが Γ から作った $A^{\mu}_{\rho\nu}$ はテンソルである．

これに反して，

$$S^{\mu}_{\rho\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}) \equiv S^{\mu}_{\nu\rho}$$

は Γ と同じ変換規則にしたがう．それゆえ，S はテンソルではない．

テンソルの定義からわかるように，時空内のある1点でテンソル A のすべての成分が0ならば，どのような座標変換をしても，やはりそのすべての成分は0である．またある系から見て，この時空点において，A の少なくとも1個の成分が0でなかったとすれば，たとえどのような座標変換をしても，A のすべての成分を一度に0にするわけにはいかない．

ところが上に述べた $S^{\mu}_{\rho\nu}$ はテンソルではない．この変換性は (9.8) と同じである．そこで適当な座標変換を行なえば，時空内の1点で，S の全部の成分（これは $\rho\nu$ について対称であるから，全部で $4\times 10=40$ 個ある）を一拠に消し去ることができる．または逆に，たとえある座標系では S の全成分が0であったとしても，他の座標系からみれば S は0でなくなる．このようなことは，すべて (9.8) の右辺の第2項のためである．

そこで，いまある座標系（これを X－系とする）から見たときに，時空内の1点において，S のすべての成分が0であったとする．これを任意の座標系（これを x－系と呼ぶ）からみると，(9.8) により

$$S^{\mu}_{\rho\nu}(x) = -\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial X^{\alpha}\partial X^{\beta}}\cdot\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}\cdot\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$

となる．

話をもとにもどして，上に定義した反変ベクトルの共変微分法を，一般のテンソルに対しても適用できるように拡張しよう．それには普通の微分法をお手本として，次の規則を要求する．

(i)　2つの量 A, B（これらは一般に任意のテンソルとする）があったときに，積 $A\cdot B$ に対して

$$\nabla_{\mu}(A\cdot B) \overset{d}{\equiv} (\nabla_{\mu}A)\cdot B + A\cdot(\nabla_{\mu}B)$$

(ii)　スカラー $S(x)$ に対しては

$$\nabla_{\mu}S(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial S(x)}{\partial x^{\mu}}$$

そこでまず共変ベクトル B_{μ} の共変微分を考えよう．$A^{\mu}\cdot B_{\mu}$ はスカラーであるから，上の (ii) から

$$\nabla_\mu(A^\rho B_\rho)=\partial_\mu(A^\rho B_\rho) \tag{9.9}$$

一方，(i) を左辺に応用すると

$$\nabla_\mu A^\rho\cdot B_\rho+A^\rho\cdot\nabla_\mu B_\rho=(\partial_\mu A^\rho+A^\lambda\Gamma^\rho_{\lambda\mu})B_\rho+A^\rho\cdot\nabla_\mu B_\rho$$

これと (9.9) の右辺とを比べると，Aは任意のベクトルであるから，結局

$$\nabla_\mu B_\rho=\partial_\mu B_\rho-\Gamma^\lambda_{\rho\mu}B_\lambda \tag{9.10}$$

となる.

(9.5), (9.10) を使うと，(i) によって高階テンソルの共変微分の定義がわかる．たとえば3個のベクトルの積

$$T^\mu{}_{\rho\sigma}\overset{d}{\equiv}A^\mu B_\rho C_\sigma$$

の共変微分を考えてみよう．(i) によれば

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda T^\mu{}_{\rho\sigma}=&\,\partial_\lambda(A^\mu B_\rho C_\sigma)+\Gamma^\mu_{\tau\lambda}A^\tau B_\rho C_\sigma\\&-\Gamma^\tau_{\rho\lambda}A^\mu B_\tau C_\sigma-\Gamma^\tau_{\sigma\lambda}A^\mu B_\rho C_\tau\end{aligned}$$

となる．そこで一般のテンソル（つまり必ずしもベクトルの直積とは限らない）に対して，その共変微分を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda T^{\mu\nu\cdots\rho}_{\alpha\beta\cdots\gamma}\equiv&\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda}T^{\mu\nu\cdots\rho}_{\alpha\beta\cdots\gamma}+\Gamma^\mu_{\tau\lambda}\cdot T^{\tau\nu\cdots\rho}_{\alpha\beta\cdots\gamma}+\Gamma^\nu_{\tau\lambda}\cdot T^{\mu\tau\cdots\rho}_{\alpha\beta\cdots\gamma}\\&+\cdots+\Gamma^\rho_{\tau\lambda}\cdot T^{\mu\nu\cdots\tau}_{\alpha\beta\cdots\gamma}-\Gamma^\tau_{\alpha\lambda}\cdot T^{\mu\nu\cdots\rho}_{\tau\beta\cdots\gamma}-\Gamma^\tau_{\beta\lambda}\cdot T^{\mu\nu\cdots\rho}_{\alpha\tau\cdots\gamma}\\&-\cdots-\Gamma^\tau_{\gamma\lambda}\cdot T^{\mu\nu\cdots\rho}_{\alpha\beta\cdots\tau}\end{aligned} \tag{9.11}$$

この定義が座標系の取方に無関係であること，つまり (9.11) の右辺は全体としてTよりも共変テンソルの階数が1つだけ高いテンソルになっていることは，(9.8) を使って証明できる.

最後に1つたいせつなことをつけ加えよう．いま共変ベクトル A_μ の共変微分を考える．すなわち

$$\nabla_\nu A_\mu=\partial_\nu A_\mu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda.$$

同様に，νとμとを入れ換えたものを作り，これを上の両辺から引くと

$$\nabla_\nu A_\mu-\nabla_\mu A_\nu=\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu-(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\mu})A_\lambda$$

つまり (8.3) で定義された $f_{\mu\nu}$ は，次のようにも書ける.

$$\begin{aligned}f_{\mu\nu}&\overset{d}{\equiv}\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\\&=\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu-(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\mu})A_\lambda\end{aligned} \tag{9.12}$$

(9.12) の右辺の最後の項は (9.8)$'$ でも述べたようにテンソルである．したがって(9.12)，

の右辺はすべての項がテンソルである．このことからも $f_{\mu\nu}$ がテンソルであることは容易にわかる．特に Γ が

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$$

という対称性をもっているときには，(9.12) は

$$f_{\mu\nu}=\nabla_{\mu}A_{\nu}-\nabla_{\nu}A_{\mu}$$

という簡単な関係式となる．

これと同じようなことは (8.5) についても成り立つ．読者は練習のために自分で確かめてみるがよかろう．

§ 10. 曲率テンソル

前の節で定義された共変微分の大きな特徴の1つは，微分の順序を交換できないということである．普通の微分の場合，たとえば2変数の関数 $f(x,y)$ が，性質のよいものであれば，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

が成立する．これが成り立たないような，やっかいな関数 f は，物理学ではあまりでてこない．ところが共変微分の場合には，一般に微分の順序は交換できない．例として反変ベクトル A^{μ} の2回共変微分を考えてみよう．(9.11) から容易に次の式がでてくる．

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\alpha}&=\partial_{\mu}(\nabla_{\nu}A^{\alpha})+\nabla_{\nu}A^{\beta}\cdot\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\nabla_{\rho}A^{\alpha}\\&=\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\alpha}+A^{\lambda}\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}+\partial_{\mu}A^{\lambda}\cdot\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}+\partial_{\nu}A^{\beta}\cdot\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}+A^{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\\&\quad-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\nabla_{\rho}A^{\alpha}.\end{aligned}\tag{10.1}$$

(10.1) の μ と ν とを入れ換えたものを，(10.1) から引くと

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\alpha}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}A^{\alpha}&=A^{\lambda}\{\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}+\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}-\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\}\\&\quad+(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu})\cdot\nabla_{\rho}A^{\alpha}\end{aligned}$$

となる．いま

$$\begin{aligned}B^{\alpha}{}_{\lambda,\mu\nu}&=-B^{\alpha}{}_{\lambda,\nu\mu}\\&\overset{d}{\equiv}\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\end{aligned}\tag{10.2}$$

という記号を使うと

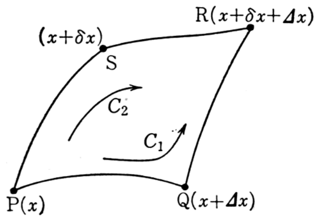
$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu})A^{\alpha}=(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu})\nabla_{\rho}A^{\alpha}+A^{\lambda}\cdot B^{\alpha}{}_{\lambda,\mu\nu}\tag{10.3}$$

となる．この右辺は一般には0とはならない．

ところで (10.3) の左辺はもちろん3階のテンソルである．右辺の第1項も (9.8)′ か

らわかるようにテンソルである．したがって，右辺の最後の項もテンソルである．このことから（10.2）で定義された B は4階テンソルでなければならない．この B は**曲率テンソル**と呼ばれる．この4個の添字については，（10.2）にあるように下の最後の2個の添字についてのみ反対称という制限がある．それゆえ，B の0でない独立な成分の数は（α の個数）×（λ の個数）×（$[\mu\nu]$ の個数）$=4\times4\times6=96$ 個である．

Bを曲率テンソルと呼ぶ理由は次の事情からもわかる．いま時空内の1点P（その座標を x）において，1つの反変ベクトル A^μ を考える．この A^μ をPから道 C_1（**第1図参照**）にそって，P→Q→R の順序で点R（その座標を $x+\delta x+\varDelta x$）にまで平行移動させたとする．このようにしてRまで到達したときのベクトルを $A^\mu(\mathrm{R},C_1)$ と記す．上のような道のほかに，もう1つの道 C_2（P→S→R）にそって $A(\mathrm{P})$ を平行移動させたときの，Rにおけるベクトルを $A^\mu(\mathrm{R},C_2)$ とする．この2つの結果を比較してみよう．



第 1 図

まず平行移動の定義から，$\varDelta x$，δx が共に無限小のとき

$$A^\mu(\mathrm{Q})=A^\mu(\mathrm{P})-A^\rho(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\rho\alpha}(\mathrm{P})\cdot\varDelta x^\alpha$$

$$\begin{aligned}A^\mu(\mathrm{R},C_1)&=A^\mu(\mathrm{Q})-A^\lambda(\mathrm{Q})\Gamma^\mu_{\lambda\beta}(\mathrm{Q})\cdot\delta x^\beta\\&=A^\mu(\mathrm{P})-A^\rho(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\rho\alpha}(\mathrm{P})\varDelta x^\alpha-A^\rho(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\rho\beta}(\mathrm{Q})\cdot\delta x^\beta\\&\quad+A^\rho(\mathrm{P})\Gamma^\lambda_{\rho\alpha}(\mathrm{P})\cdot\Gamma^\mu_{\lambda\beta}(\mathrm{Q})\delta x^\beta\cdot\varDelta x^\alpha.\end{aligned}$$

同様に $A^\mu(\mathrm{R},C_2)$ を計算することができる．そこで両者のちがいは次のようになる．

$$\begin{aligned}A^\mu(\mathrm{R},C_1)-A^\mu(\mathrm{R},C_2)&=A^\rho(\mathrm{P})\cdot\{\Gamma^\mu_{\rho\alpha}(\mathrm{S})-\Gamma^\mu_{\rho\alpha}(\mathrm{P})\}\varDelta x^\alpha\\&\quad-A^\rho(\mathrm{P})\cdot\{\Gamma^\mu_{\rho\beta}(\mathrm{Q})-\Gamma^\mu_{\rho\beta}(\mathrm{P})\}\delta x^\beta\\&\quad+A^\rho(\mathrm{P})\{\Gamma^\lambda_{\rho\alpha}(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\lambda\beta}(\mathrm{P})-\Gamma^\lambda_{\rho\beta}(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}(\mathrm{P})\}\varDelta x^\alpha\cdot\delta x^\beta\end{aligned}$$

ここで $\varDelta$ または δ の2次以上は無視した．この右辺はさらに書き直されて

$$=A^\rho(\mathrm{P})\left\{\frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\alpha}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\beta}}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\lambda_{\rho\alpha}\Gamma^\mu_{\lambda\beta}-\Gamma^\lambda_{\rho\beta}\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\right\}\varDelta x^\alpha\cdot\delta x^\beta$$

となる．つまり

$$A^\mu(\mathrm{R},C_1)-A^\mu(\mathrm{R},C_2)=-A^\rho(\mathrm{P})\cdot B^\mu{}_{\rho,\alpha\beta}(\mathrm{P})\cdot\varDelta x^\alpha\delta x^\beta. \qquad (10.4)$$

この式から，くいちがいが起こらないための必要十分条件は，P点の近くで

$$B^\mu{}_{\rho,\alpha\beta}=0$$

が成立するということである．

ともかく，ある1つのベクトルを，常にそのもとのものに平行にたもちながら移動させていくとき，最後に得られた答が途中の道筋によってちがうというような奇妙なことは，われわれの知っているユークリッド幾何学では起こらなかった．これは明らかに，P点のまわりの空間（つまり時空）の異常な性質によるものと考えられる．この異常性，つまり1種の歪みを表現するものが B テンソルということになる．すなわち B が0なら(10.4)の左辺のくいちがいは消える．つまり時空はユークリッド的であったことになる．これに反して，B が0でなければ，時空は非ユークリッド的ということになる．

最後にこの B テンソルを縮約すると2階共変テンソルができる．

$$
\begin{aligned}
B_{\lambda\mu} &\overset{d}{\equiv} B^{\alpha}{}_{\lambda,\mu\alpha} \\
&\overset{d}{\equiv} \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} \qquad (10.5)
\end{aligned}
$$

$$
S_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} B^{\alpha}{}_{\alpha,\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} \qquad (10.6)
$$

§ 9 および § 10 で述べたことは，§ 5 から § 8 までに考えてきたことと次の点で区別しなくてはいけない．すなわち，§ 5 から § 8 まででは時空は単なる4次元連続体として扱われた．それゆえ，ある点 P からその隣りの点 Q までベクトルを平行に移す方法はなにも定義されていなかった．つまり，時空内の各点はこの意味で互いになんの結びつきもなかった．

これに対し，§ 9，§ 10 では，時空内にアフィン係数の場，すなわち $\Gamma(x)$ があたえられているものとした．このために時空内の2点におけるベクトルを比べることもできた．この意味で，そこに考えた時空は単に4次元連続体であるばかりでなく，さらにアフィン係数によって各点が互いに連結されていることになる．しかしまだ2点間の距離とか，ベクトルの大きさという概念はなにひとつ使われていない．もしこのような概念をさらに時空につけ加えると，もっと詳細な議論ができるようになる．このような“距離”の定義される場合を次の節で扱う．

§ 11. 計量テンソル

§ 4 ですでに説明したように，一般相対論で考える時空は単に4次元連続体であるばかりでなく，さらにこの中の任意の2点（一方の座標を x，他のそれを $x+\Delta x$ ）のあいだの距離も，次のように定義されている．

$$
ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\cdot \Delta x^{\alpha}\cdot \Delta x^{\beta} \qquad (11.1)
$$

この ds^2 は，2点間の4次元的な不変距離の2乗を示す*). このような時空は幾何学では，4次元 Riemann 空間と呼ばれる.

ところで一般相対性原理によれば，われわれが今後考える変換は，(11.1) の値を不変にするような座標変換

$$x^\mu \to x^{\mu'} = f^\mu(x^0,\ x^1,\ \cdots x^3) \qquad (11.2)$$
$$(\mu = 0,\ 1,\ \cdots 3)$$

である. そのためには $g_{\alpha\beta}$ が

$$g_{\alpha\beta}'(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}\cdot g_{\mu\nu}(x)$$

という変換規則にしたがえばよい. この条件は，$g_{\alpha\beta}$ が2階共変テンソルならよいということにほかならない. このような共変テンソル $g_{\alpha\beta}$ のことを**計量テンソル**という.

さて g が共変テンソルならば，どんな座標変換でも(11.1)の値を不変にするから，変換 (11.2) については，別に制限を考えなくてよいように思われる. ところが実はそうでない. もちろん (11.2) に出てくる関数 f^μ は連続で，少なくとも1階微分可能であることは必要である. それよりもたいせつなことは，われわれが扱う4個の座標成分の中で，3個（たとえば x^1, x^2, x^3）は空間的なものであり，残りの1個（これを x^0）は時間的でなければいけないということである.

ここで“空間的”とか“時間的”という意味は特殊相対論の場合と同じである. すなわち時空内の任意の隣接した2点の座標の差を Δx^μ とするとき，次のように定義される**).

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\cdot\Delta x^\mu\cdot\Delta x^\nu \begin{cases} >0: & \text{ベクトル } \Delta x^\mu \text{ は空間的} \\ <0: & \text{ベクトル } \Delta x^\mu \text{ は時間的} \\ =0: & \text{ベクトル } \Delta x^\mu \text{ はゼロ・ベクトル.} \end{cases}$$

そこでいま Δx^μ として，($\Delta x^0 \neq 0$, $\Delta x^k = 0$ $k = 1, 2, 3$) のようなベクトルを考える. これは x^0 軸上の2つの近接した点の間の座標差を示すベクトルである. x^0 - 成分は時間的であるという約束と，上の定義から

---

*) $$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha})$$

と書き直すとき，($\alpha\beta$) について反対称な第2項は ds^2 の定義には関係しない. そこで本書では今後 $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ と約束する.

) 時空内のある超曲面たとえば $\varphi(x^0,\ x^1 \cdots x^3) = 0$ を考える. この面上の任意の互いに近接した2点 x^μ, $x^\mu + \Delta x^\mu$ について，常に Δx^μ が空間的ベクトルになるとき，この超曲面を空間的超曲面**と呼ぶ.

$$ds^2 = g_{00}(x)\cdot(\varDelta x^0)^2 < 0$$

つまり

$$g_{00}(x) < 0 \tag{11.3}$$

が必要条件として出てくる.

まったく同様に，($\varDelta x^k \neq 0$, $k=1, 2, 3$, $\varDelta x^0 = 0$) のようなベクトルを考える．これは時空内の $x^0=$一定という超曲面上の近接した2点を結ぶベクトルである．これが空間的であるためには

$$ds^2 = \sum_{k\cdot l=1}^{3} g_{kl}(x)\varDelta x^k\cdot\varDelta x^l > 0$$

がどんな $\varDelta x^k$ に対しても成立しなければいけない．そのためには次の3種類の条件が必要である.

$$g_{ii}(x) > 0 \qquad (i=1, 2, 3) \tag{11.4}$$

$$\begin{vmatrix} g_{ii}(x) & g_{ik}(x) \\ g_{ki}(x) & g_{kk}(x) \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, 3 \\ k=1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

および

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0 \tag{11.6}$$

(11.4) は i の値に応じて3個の条件式をあたえる．同様に，(11.5) も i と k の値に応じて3個の条件式をあたえる.

つまり，ある座標系が物理的に許されるためには，いいかえると，4個の座標軸の中で1本は時間軸，残りの3本は空間軸となっているためには，(11.3)～(11.6) の条件が時空内のすべての点において成立していなければならない．このことは座標変換しても，やはり成り立たねばいけない．それゆえ，われわれが扱う座標変換は，これらの条件を破らないような変換であることが必要である.

なおついでに，次のことをつけ加えておく．いま

$$g(x) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & \cdots & \cdots & g_{13} \\ \vdots & & & \\ g_{30} & \cdots & \cdots & g_{33} \end{vmatrix}$$

とおくと，$g(x)$ の変換規則は (7.6) から

$$g'(x') = \left\{\frac{\partial(x^0\cdots x^3)}{\partial(x^{0'}\cdots x^{3'})}\right\}^2 g(x) \tag{11.7}$$

となる．そこで $g(x)$ の符号は座標変換しても変わらないことが判る．ところで適当な座標変換を行なえば（11.4）～（11.6）のために，ある決まった点 (x) における $g_{\alpha\beta}(x)$ を

$$g_{\alpha\beta}(x) \to g'_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha=\beta=1,\ 2,\ 3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \\ -1 & \alpha=\beta=0 \end{cases}$$

のように変換することが必ずできる．このことと，（11.7）とを一緒にすると，必ず

$$g(x) < 0 \tag{11.8}$$

であることがわかる．

さて，計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ が時空内のある領域にわたって，あたえられているものとすると，これから対称反変テンソル $g^{\alpha\beta}(x)$ を次の式で定義できる．

$$g^{\alpha\rho}(x)\cdot g_{\rho\beta}(x) \overset{d}{\equiv} \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{11.9}$$

いま $g_{\alpha\beta}(x)$ が $\delta g_{\alpha\beta}(x)$ だけ変化したとすれば，これに応じて，$g^{\alpha\beta}$ の値も変化する．その関係は（11.9）の両辺の変分をとって，

$$\delta g^{\alpha\rho}\cdot g_{\rho\beta} + g^{\alpha\rho}\cdot\delta g_{\rho\beta} = 0$$

これに $g^{\beta\sigma}$ を掛けて，β について和をとると

$$\delta g^{\alpha\sigma} = -g^{\beta\sigma}g^{\alpha\rho}\delta g_{\rho\beta} \tag{11.10}$$

という関係が成立する．

$g^{\alpha\beta}$ は，行例式 g の要素 $g_{\mu\nu}$ に対する余行列式を計算するのに役立つ．いまこの余行列式を $\tilde{g}^{\mu\nu}$ と書くことにすれば

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g\cdot g^{\mu\nu} \tag{11.11}$$

である．なぜかというと，（11.11）で定義された量は，たしかに余行列式の性質をもっていることが次のように示されるからである．

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\cdot g_{\nu\lambda} = g\cdot g^{\mu\nu}\cdot g_{\nu\lambda} = g\cdot\delta^{\mu}_{\lambda}$$

（11.11）を使うと，$g_{\alpha\beta}$ が $\delta g_{\alpha\beta}$ だけ変化したときに，これに伴う行列式 g の変分を計算できる．すなわち

$$\delta g = \tilde{g}^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu} = g\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu} \tag{11.12}$$

である．

$g^{\alpha\beta}$，$g_{\alpha\beta}$ は，ベクトルの大きさを定義するのにも役立つ．いま任意の反変ベクトル $A^{\mu}(x)$ を考えよう．この大きさを

$$|A| \overset{d}{\equiv} \sqrt{|g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}|}$$

で定義することにする．同様に，共変ベクトル B_{μ} については

$$|B| = \sqrt{|g^{\alpha\beta}B_\alpha B_\beta|}$$

をもって定義する．さらに反変ベクトル A^μ から

$$A_\mu \stackrel{d}{\equiv} g_{\mu\nu}A^\nu$$

のようにして，共変ベクトルを作ることもできるし，逆に共変ベクトル B_α から

$$B^\beta \stackrel{d}{\equiv} g^{\beta\alpha}B_\alpha$$

のように反変ベクトルを導きだすこともできる．テンソルについても，g を用いて，縮約や反変から共変への変更などが考えられる．すなわち

$$T^\mu \stackrel{d}{\equiv} g_{\rho\sigma}T^{\mu\rho\sigma},\quad T^{\mu\rho}{}_\sigma \stackrel{d}{\equiv} g_{\lambda\sigma}T^{\mu\rho\lambda}$$

のようなぐあいに，g の用途は，きわめてひろい．

最後に § 7 でも述べたように，任意のテンソル $T^{\mu\nu\cdots}(x)$ からテンソル密度を作るのには

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu\cdots}(x) \stackrel{d}{\equiv} \sqrt{-g(x)}\cdot T^{\mu\sigma\cdots}(x) \tag{11.13}$$

とすればよいこともわかる．

§ 12. $g_{\mu\nu}$ と $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ の関係

§ 9 でベクトルの平行移動について述べたが，そのときはまだ計量テンソルについては何も考えなかった．しかし，いまわれわれが考えている時空はその各点に $g_{\alpha\beta}(x)$ が定義されている．それゆえ各点においてベクトルの大きさを定義できる．そこで平行移動についても，もっと立ち入った議論が可能となる．その結果，アフィン係数についても，§ 9 よりもっと詳細な知識が得られる．

さて，われわれになじみの深いユークリッド空間では，ベクトルをある 1 点から他の点まで平行移動させても，その方向も大きさも変わらない．しかし §9 でも述べたように，平行移動ということを座標系の選び方に無関係に定義するためには，ベクトルの成分は移動によって変化することを許さなければならなかった．しかしここでベクトルを平行移動させても，その大きさは変わらないという新らしい要求をしよう．ベクトルの大きさということが定義できなかった § 9 ではこのような要求は無意味であったが，いまはそれが意味のあるものである．§ 11 で述べた，“ベクトルの大きさ”はスカラー量である．したがって，座標系の取り方に無関係に，離れた 2 点におけるベクトルの大きさを比較することができる．

そこでいま，点 x における 1 つのベクトルを $A^\mu(x)$ としよう．これを近接した他の点 $x+\Delta x$ まで平行に移動させた結果を $A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ と記そう．そうするとアフィン

係数を $\Gamma(x)$ とすると，§9 により

$$A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}=A^\mu(x)-A^\rho(x)\,\Gamma^\mu_{\rho\nu}\cdot\Delta x^\nu. \tag{12.1}$$

ところで，ベクトルの大きさが変わらないという新らしい要求は式で書くと

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\cdot A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\cdot A^\nu(x+\Delta x)_{/\!/}=g_{\mu\nu}(x)\cdot A^\mu(x)\cdot A^\nu(x)$$

となる．これに (12.1) を代入して，添字を少し書きかえると

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu}-\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma}\right)A^\mu(x)A^\nu(x)\cdot\Delta x^\lambda=0$$

となる．A^μ は任意のベクトルとしてよいから，結局

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu}-\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma}=0 \tag{12.2}$$

となる．この左辺は $g_{\mu\nu}$ の共変微分にほかならないから

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu}=0 \tag{12.3}$$

とも書ける．

(12.2) はきわめて大事な関係式である．つまりわれわれが考えている時空の各点には，$g_{\mu\nu}(x)$ と $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ の2種の量がそれぞれ定義されている．ところで，これらの量はまったく勝手ではありえない．両者の関係がつまり (12.2) である．そこで Γ を $g_{\mu\nu}$ およびその微分を使って表わすために，(12.2) を Γ について解いてみよう．(12.2) の添字 $(\lambda\mu\nu)$ を順に入れ換えて

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}-\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}=0 \tag{12.2$'$}$$

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}-\Gamma^\sigma_{\nu\mu}g_{\sigma\lambda}-\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}=0 \tag{12.2$''$}$$

そこで $(12.2)+(12.2)'-(12.2)''$ を作ると

$$S^\sigma_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu}=\frac{1}{2}\{\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\nu g_{\lambda\mu}-\partial_\mu g_{\nu\lambda}\}+A^\sigma_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu}-A^\sigma_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}. \tag{12.4}$$

ここで S および A は次のような量である．

$$S^\sigma_{\lambda\nu}=\frac{1}{2}(\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}+\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}),\quad A^\sigma_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}-\Gamma^\sigma_{\mu\lambda})$$

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}=S^\sigma_{\lambda\nu}+A^\sigma_{\lambda\nu}$$

そこで (12.4) の両辺に $g^{\mu\rho}$ を掛けて μ について和をとり，さらに $A^\rho_{\lambda\nu}$ を両辺に加えると

$$\Gamma^\rho_{\lambda\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\{\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\nu g_{\lambda\mu}-\partial_\mu g_{\nu\lambda}\}+A^\sigma_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu}g^{\mu\rho}$$
$$-A^\sigma_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}g^{\mu\rho}+A^\rho_{\lambda\nu} \tag{12.5}$$

もしも Γ が対称アフィン係数，すなわち

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \quad \text{すなわち} \quad A^{\sigma}_{\lambda\nu}=0 \tag{12.6}$$

とすると

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\{\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}+\partial_{\nu}g_{\lambda\mu}-\partial_{\mu}g_{\nu\lambda}\} \tag{12.5$'$}$$

となる．

(12.5)′ は，Γ が $g_{\mu\nu}$ およびその微分だけから作られる場合で，このような特別な Γ を，次のような記号で表わすことがある．すなわち

$$\left\{\begin{matrix}\rho\\ \lambda\ \nu\end{matrix}\right\}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\{\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}+\partial_{\nu}g_{\lambda\mu}-\partial_{\mu}g_{\nu\lambda}\}. \tag{12.5$''$}$$

(12.5)″ で定義される $\left\{\begin{matrix}\rho\\ \lambda\ \nu\end{matrix}\right\}$ のことを，**Christoffel の括弧**，または **Christoffel の 3 指標記号** という．このような呼び名をつけたり，特別な記号を使うのは，これをテンソルと混同しないようにするためである．なおこの記号をつかうと，もっとも一般なアフィン係数 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は (12.5) から

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}+A^{\sigma}_{\mu\tau}g_{\sigma\nu}g^{\tau\lambda}+A^{\sigma}_{\nu\tau}g_{\sigma\mu}g^{\tau\lambda}+A^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{12.7}$$

となる．ここに $A^{\lambda}_{\mu\tau}$ は，$\mu\tau$ について反対称の 3 階テンソルならばなんでもよい．

一般に $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ の ($\mu\nu$) について反対称の部分 $A^{\lambda}_{\mu\nu}$ は 3 階のテンソルであることはすでに述べた．重力場のみでなく，電磁場をも時空の幾何学的性質として統一的に理解しようとする，いわゆる，統一場理論では，しばしばこの $A^{\lambda}_{\mu\nu}$ が注目された．しかしながら本書では，今後 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は $\mu\nu$ について対称で，(12.5)″ であたえられるものに限ることにする．

積の共変微分の定義および (11.9) を使うと，(12.3) から

$$\nabla_{\lambda}g^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}+g^{\tau\nu}\Gamma^{\mu}_{\tau\lambda}+g^{\mu\tau}\Gamma^{\nu}_{\tau\lambda}=0 \tag{12.8}$$

がでてくる．この結果を使うと任意のベクトル

$$A_{\mu}=g_{\mu\nu}A^{\nu} \quad A^{\mu}=g^{\mu\nu}A_{\nu}$$

に対して

$$\nabla_{\lambda}A_{\mu}=g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}A^{\nu}, \quad \nabla_{\lambda}A^{\mu}=g^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}A_{\nu}$$

が成り立つ．

§13. Riemann-Christoffel テンソル

アフィン係数 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ が特に (12.5)′ または (12.5)″ であたえられるとき，それから作られる曲率テンソル $B^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ のことを **Riemann-Christoffel テンソル**という．これを普通には $R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ と記す．Γ が特に (12.5)″ であたえられていることを示すために 3 指標記号を使って書くと，$R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ は

$$R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_{\mu}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \nu\end{Bmatrix} - \partial_{\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \mu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \lambda\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \beta\ \nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \lambda\ \nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \beta\ \mu\end{Bmatrix} \tag{13.1}$$

のようになる．

アフィン係数が (12.5)″ という特別なものであるために，$R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ はその添字について $B^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ の場合よりもいろいろの対称性をもっている．いま

$$R_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\rho}R^{\rho}{}_{\beta,\mu\nu} \tag{13.2}$$

とおけば，この対称性とは次のようなものである．

$$\text{(i)}\quad R_{\alpha\beta,\mu\nu} = R_{\mu\nu,\alpha\beta}$$

$$\text{(ii)}\quad R_{\alpha\beta,\mu\nu} = -R_{\alpha\beta,\nu\mu}$$

$$\text{(iii)}\quad R_{\alpha\beta,\mu\nu} = -R_{\beta\alpha,\mu\nu},$$

さらに

$$\text{(iv)}\quad R_{\alpha\lambda,\mu\nu} + R_{\alpha\mu,\nu\lambda} + R_{\alpha\nu,\lambda\mu} = 0$$

という関係が成立する．これらの関係式のために R の多数の成分の中で，1 次独立な，0 でない成分の数は 20 個となる．

証明： 2 個の添字 $[\alpha\beta]$ を一緒にして A で，またもう 1 組の添字 $[\mu\nu]$ を一緒にして B で示そう．(ii) (iii) の性質から $A = [0\,1]$, $[0\,2]$, $[0\,3]$, $[2\,3]$, $[3,1]$, $[1,2]$ の 6 通りの場合がある．B についても同様である．そこで R を

$$R_{A,B} \overset{d}{\equiv} R_{\alpha\beta;\mu\lambda}$$

と書いて，$R_{A,B}$ を (6×6)— 行列の (A,B) 要素と考えよう．ところで (i) から $R_{A,B} = R_{B,A}$ であるから，この行列は対称行列となる．それゆえ R の独立な成分の個数は 21 個である．

次に (iv) の条件式を考えてみよう．この関係式の添字の中で，どの 2 つが同じものであっても，(i), (ii), (iii) のために，(iv) は $0=0$ という無内容な式になってしまう．(iv) の条件が，(i), (ii), (iii) とは独立なものになるのは，4 個の添字がすべて異なる場合に限る．したがって，(iv) は多くの制限をあたえるように見うけられるが，実はこれはただ 1 個の条件式にすぎない．そのために，R のほんとうに独立な成分の個数は

21－1＝20 個となる.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終り）

ところで (i) から (iv) までの関係式を証明するには，つぎの点に注意するとよい. 3 指標記号の定義 (12.5)″ を (13.1) に代入して直接に (i)～(iv) を証明することは，考えただけでもいやになるほどめんどうなことである. (i)～(iv) はいずれも，時空内の任意の1点 (x) におけるテンソル量のあいだの代数的関係式である. それゆえこれらの関係式は座標変換しても変わらない. そこでこれを証明するには，なるべく R が簡単な形になるように，上手に座標系を選べばよい. このような座標系としては**測地系**が適当である.

何度も述べたように，対称アフィン係数 Γ はテンソルではないから，任意の点 (x) における Γ のすべての成分を座標変換によって消し去ることができる. $\Gamma(x)$ がすべて点 (x) で0になるような座標系を，(x) における**測地系**とか**測地座標系**という.

いま点 (x) における測地系を考えると，(12.2) および (12.8) から，そこでは

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}=0 \qquad \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}=0$$

そこで，この点では

$$\partial_\mu\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \nu\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\{\partial_\mu\partial_\nu g_{\lambda\beta}+\partial_\mu\partial_\beta g_{\nu\lambda}-\partial_\mu\partial_\lambda g_{\beta\nu}\}$$

となる. したがって $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ は

$$R_{\alpha\beta,\mu\nu}(x)=\frac{1}{2}\{\partial_\mu\partial_\beta g_{\nu\alpha}-\partial_\nu\partial_\beta g_{\mu\alpha}+\partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta}-\partial_\mu\partial_\alpha g_{\nu\beta}\} \tag{13.3}$$

となる. この右辺を見ると，(i)(ii)(iii) は一目瞭然である. また (13.3) を使って (iv) の左辺を計算すると，すべての項が相殺して0になることが容易に確かめられる.

上に述べたように，ある点 (x) における測地系を考えると，この座標系からみれば点 (x) では $g_{\alpha\beta}$ の1階微分は0となる. しかしこの点における $g_{\alpha\beta}$ 自身の値は，必ずしも Minkowski 型の計量テンソル $\eta_{\alpha\beta}$ とは一致しない. そこでこの測地系を適当に1次変換して，この特定な点 (x) における $g_{\alpha\beta}$ の値を $\eta_{\alpha\beta}$ と一致させたとする. このようにしても (x) における Γ の値が依然として0であることはもちろんである.

以上のようにして，点 (x) において局所的に Lorentz 座標系を設置するこができる. しかし Γ の1階微分（あるいは $g_{\alpha\beta}$ の2階微分）は，この (x) においても一般には0でない. それゆえ，上のように設置された測地系を (x) から離れた場所にまで延長して使うとき，そこでは Γ はもはや0でない. したがってこれを Lorentz 座標系とみなすわけにはいかない.

これに反して，次のような場合には，ある有限なひろがりをもつ時空内の領域 Ω で Lorentz 系を設置することができる.

いま Ω 内のどの点でも

$$R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}(x)=0 \qquad (x \text{ は } \Omega \text{ 内の任意の点}) \tag{13.4}$$

であるとする. このときは，すでに (10.4) で述べたように，Ω 内はユークリッド的である. したがって Ω 内の1点 (x) で測地系を設置すると，これは (13.4) のおかげて Ω のいたるところで Lorentz 座標系とみなすことができる. (13.4) が成立するときに実際にどのようにして Lorentz 系を作ればよいかについては，巻末の付録 § **A. 1** に証明がある.

ともかく，(13.4) は Ω の中がユークリッド的（正確にいうならば，Minkowski 的というべきである）であるための必要十分条件である.

さて (10.5) に対応して，いまの場合にも $R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ を縮約すると

$$R_{\mu\nu}\equiv R_{\nu\mu}\overset{d}{\equiv}R^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha}\overset{d}{\equiv}\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}-\partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \tag{13.5}$$

この $R_{\mu\nu}$ は **Ricci のテンソル**と呼ばれる.

これに対して，(10.6) で定義される $S_{\mu\nu}$ は0となる. それは次のような関係式のためである. すなわち (11.12) を使うと

$$\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu}=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right)=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\left(\frac{1}{g}\partial_{\nu}g\right)=\partial_{\mu}\partial_{\nu}\log\sqrt{-g}=\partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$$

ところでこの関係式，つまり μ と ν の入れ換えに対して対称であるという性質を，(13.5) の右辺の第1項に使えば，$R_{\mu\nu}$ の $\mu\nu$ についての対称性を直接に証明できる.

(13.5) からさらに，**スカラー曲率** $\boldsymbol{R}$ を次のように定義できる.

$$R\overset{d}{\equiv}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{13.6}$$

さて Riemann-Christoffel テンソルが満足する有名な恒等式について述べよう. いま任意のベクトル場 $A^{\alpha}(x)$ の共変微分を計算しよう.

すでに知っているように*) ((10.3) 参照)

$$[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]A^{\alpha}\overset{d}{\equiv}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu})A^{\alpha}=R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}A^{\beta}$$

そこで

$$\nabla_{\lambda}[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]A^{\alpha}=\nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}\cdot A^{\beta}+R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}\cdot\nabla_{\lambda}A^{\beta} \tag{13.7}$$

また

---

*) 一般に2つの演算子 X, Y について

$$X\cdot YA^{\alpha}-Y\cdot XA^{\alpha}\overset{d}{\equiv}[X,Y]A^{\alpha}$$

という記号を使うことにする.

$$\nabla_\mu \nabla_\nu (\nabla_\lambda A^\alpha) = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\tau\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \cdot \Gamma^\beta_{\tau\nu}) \nabla_\lambda A^\tau - (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\mu}) \nabla_\rho A^\alpha$$
$$+ \{\partial_\mu \partial_\nu (\nabla_\lambda A^\alpha) + \cdots (\mu\nu) \text{ について対称な項}\}.$$

そこで

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\lambda A^\alpha = R^\alpha{}_{\tau,\mu\nu} \nabla_\lambda A^\tau - R^\rho{}_{\lambda,\mu\nu} \nabla_\rho A^\alpha \tag{13.8}$$

(13.7) から (13.8) をひくと

$$\Big[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\Big] A^\alpha = \nabla_\lambda R^\alpha{}_{\tau,\mu\nu} \cdot A^\tau + R^\rho{}_{\lambda,\mu\nu} \nabla_\rho A^\alpha \tag{13.9}$$

そこで λ, μ, ν を順に入れ換えて

$$\Big[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]\Big] A^\alpha = \nabla_\mu R^\alpha{}_{\tau,\nu\lambda} \cdot A^\tau + R^\rho{}_{\mu,\nu\lambda} \nabla_\rho A^\alpha \tag{13.9)$'$}$$

$$\Big[\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]\Big] A^\alpha = \nabla_\nu R^\alpha{}_{\tau,\lambda\mu} \cdot A^\tau + R^\rho{}_{\nu,\lambda\mu} \nabla_\rho A^\alpha \tag{13.9)$''$}$$

(13.9) ～ (13.9)$''$ を加えると，左辺は Jacobi の恒等式から 0 となる．そこで

$$(\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\tau,\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\tau,\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\tau,\lambda\mu}) A^\tau$$
$$+ (R^\rho{}_{\lambda,\mu\nu} + R^\rho{}_{\mu,\nu\lambda} + R^\rho{}_{\nu,\lambda\mu}) \nabla_\rho A^\alpha \equiv 0. \tag{13.10}$$

(13.10) の $\equiv 0$ とは A^α がどんなベクトルであろうとも，また $g_{\mu\nu}$ が x の任意の関数の場合に常に 0 となることを示す． ところで A はまったく勝手なベクトルでよいから，A^α と $\nabla_\rho A^\alpha$ とは任意の点 x において互いに関数的に独立である． そこで (13.10) が恒等的に 0 となるためには

$$\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\tau,\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\tau,\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\tau,\lambda\mu} \equiv 0 \tag{13.11}$$

および

$$R^\rho{}_{\lambda,\mu\nu} + R^\rho{}_{\mu,\nu\lambda} + R^\rho{}_{\nu,\lambda\mu} \equiv 0 \tag{13.12}$$

が同時に任意の g に対して成立しなければならない．

(13.12) はすでにこの節のはじめに述べた (iv) という関係式にほかならない．
(13.11) が有名な **Bianchi の恒等式** である．

(13.11) の α と ν を縮約すると (13.5) の定義を使って

$$\nabla_\lambda R_{\tau\mu} - \nabla_\mu R_{\tau\lambda} + \nabla_\nu R^\nu{}_{\tau,\lambda\mu} \equiv 0$$

これに $g^{\lambda\tau}$ を掛け，さらに添字 μ をもち上げると，

$$\nabla_\lambda \left(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} R \right) \equiv 0 \tag{13.13}$$

となる． ここで $g^{\lambda\tau}$ の共変微分が 0 になるという性質を使った．(13.13) にでてくる

$$G^{\lambda\mu} \overset{d}{\equiv} R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} R \tag{13.14}$$

という量は **Einstein のテンソル** と呼ばれるもので重力理論で重要な役目をするものである．

最後に定理を1つ述べよう．証明は巻末付録にある．（付録 § **A.2** 参照）

定　理：計量テンソル $g_{\mu\nu}$ およびその1階，2階の微分から作られる2階の対称テンソルを $T^{\mu\nu}$ とする．しかもこのテンソルは g の2階微分については1次式で，さらに

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv 0$$

を満足するものとする．このような $T^{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu} = c_1 G^{\mu\nu} + c_2 g^{\mu\nu}$$

の形をしている．ただし，c_1, c_2 は任意の定数でよい．

§ 14. 例　題

いままで述べてきたことを簡単な例で具体的に示してみよう．まず3次元ユークリッド空間を考える．この空間内に設けた直交座標系を (x, y, z)，また曲座標系を $(x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi)$ とする．両者の間には

$$x = x^1 \cdot \sin(x^2) \cdot \cos(x^3), \quad y = x^1 \sin(x^2) \cdot \sin(x^3)$$

$$z = x^1 \cdot \cos(x^2)$$

が成立する．隣り合った2点間の距離の2乗は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ただし

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = (x^1)^2, \quad g_{33} = (x^1)^2 (\sin(x^2))^2, \quad g_{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu). \tag{14.1}$$

この $g_{\mu\nu}$ から，つぎのような $g^{\mu\nu}$ が作られる．

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = (x^1)^{-2}, \quad g^{33} = \{x^1 \cdot \sin(x^2)\}^{-2}$$

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu \tag{14.2}$$

(14.1)，(14.2) から Christoffel の3指標記号を計算すると，次のようになる．

$$\Gamma^1_{22} = -x^1, \quad \Gamma^1_{33} = -x^1 \cdot \{\sin(x^2)\}^2, \quad \Gamma^2_{12} = 1/x^1 = \Gamma^3_{13}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot(x^2), \quad \Gamma^2_{33} = -\sin(x^2) \cdot \cos(x^2) \tag{14.3}$$

その他の $\Gamma = 0$

このように，たとえユークリッド空間でも曲座標系を使うと，Γ は0にはならない．しかし曲率テンソル $R^\alpha{}_{\beta,\mu\nu}$ は0となる．実際，直交系で計算すれば，Γ はすべて0であるから R のすべての成分も0となることは当然である．R はテンソルであるから，座標変換して曲座標系に移っても，やはり R は0となるはずである．たとえば $R^1{}_{3,13}$ を計算してみよう．

$$R^1{}_{3,13}=\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1}-\Gamma^1_{\lambda 3}\Gamma^\lambda_{13}=-\{\sin(x^2)\}^2-\Gamma^1_{33}\cdot\Gamma^3_{31}$$

$$=-\{\sin(x^2)\}^2-(-x^1)\cdot\{\sin(x^2)\}^2\cdot\frac{1}{x^1}=0$$

となって，たしかに 0 となる．他の成分についても同様である．このようにユークリッド空間では，$R^\alpha{}_{\beta,\mu\nu}$ は 0 となる．

第 2 の例としては，3 次元ユークリッド空間内にある半径 r の球面を考えてみよう．球の中心を原点にとると，この球面上の任意の点の直交座標は

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi \qquad (r=\text{一定}) \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

となるから，任意の点の座標を 2 変数（$x^1=\theta$，$x^2=\varphi$）で示すことができる．また球面上の 2 点間の無限小距離の 2 乗は

$$ds^2=r^2(dx^1)^2+r^2\{\sin(x^1)\}^2\cdot(dx^2)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

となる．ただし

$$g_{11}=r^2,\quad g_{22}=r^2\{\sin(x^1)\}^2,\quad g_{12}=g_{21}=0 \tag{14.4}$$

これから $g^{\mu\nu}$，および Γ を計算すると，

$$g^{11}=r^{-2},\quad g^{22}=\{r\sin(x^1)\}^{-2}$$

$$\Gamma^1_{22}=-\sin(x^1)\cdot\cos(x^1),\quad \Gamma^2_{12}=\cot(x^1), \tag{14.5}$$

$$\text{その他の}\ \Gamma=0$$

となる．

ところで，Riemann-Christoffel の曲率テンソルは 4 次元空間では 20 個の独立成分をもっていたが，この例では 0 でない独立なものは

$$R_{12,12}(=-R_{12,21})$$

だけである．これは (14.5) を使うと

$$R^1{}_{2,12}=\frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{22}-\Gamma^1_{\lambda 2}\cdot\Gamma^\lambda_{21}=\frac{\partial}{\partial x^1}\{-\sin(x^1)\cdot\cos(x^1)\}-\Gamma^1_{22}\cdot\Gamma^2_{21}$$

$$=-\cos(2x^1)-\left(-\frac{\sin(2x^1)}{2}\right)\cdot\frac{\cos(x^1)}{\sin(x^1)}=\{\sin(x^1)\}^2$$

または添字を全部下につけて

$$R_{12,12}=g_{11}R^1{}_{2,12}=r^2\cdot\{\sin(x^1)\}^2 \tag{14.6}$$

そこで $R_{\mu\nu}$ を計算すると

$$R_{11}=R^{2}{}_{1,12}=-g^{22}R_{12,12}=-1$$

$$R_{12}=R_{21}=0 \tag{14.7}$$

$$R_{22}=R^{1}{}_{2,21}=-R^{1}{}_{2,12}=-\{\sin(x^1)\}^2$$

またスカラー曲率Rは

$$R\overset{d}{\equiv}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=-\frac{2}{r^2}$$

となる．つまり球面の曲率半径rは

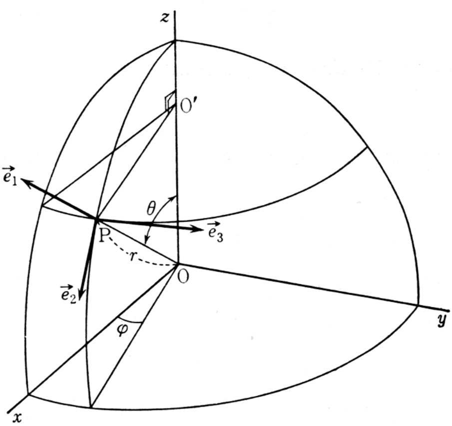
$$r=\sqrt{-\frac{2}{R}}$$

であたえられる．この関係式から，Rをスカラー曲率と呼ぶ理由が納得できるであろう．

次に平行移動について説明しよう．例として，はじめの3次元ユークリッド空間の場合を考える．まず直交座標系を用いたとき，任意のベクトル $\vec{A}$ の成分を

$$(A_x.\ A_y.\ A_z)$$

とする．また曲座標（r, θ, φ）を用いたとき**第 2 図**のように3個の互いに直交する単位ベクトル$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$を考える．$\vec{e_1}$ は点 P(r, θ, φ) において r 方向，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向の単位ベクトルである．またP点と z 軸できめられる平面内に，Oを中心として半径rの円をかくときに，この円のPにおける切線方向の単位ベクトルが $\vec{e_2}$ である．最後に，Pを通ってz軸に垂直な平面を考える．この平面をz軸がつらぬく点を O′ としよう．この平面上で O′ を中心として，O′P を半径とする円をかく．P におけるこの円の切線方向の単位ベクトルが $\vec{e_3}$ である．これら3つのベクトルの x, y, z 成分はそれぞれ



第 2 図

$$\vec{e_1}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$\vec{e_2}=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$\vec{e_3}=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$$

となる．そこで $\vec{A}$ の $\vec{e_k}(k=1, 2, 3)$ への射影は

$$\left.\begin{aligned}(\vec{A}\cdot\vec{e_1}) &\overset{d}{\equiv} A^1=(A_x\cos\varphi+A_y\sin\varphi)\sin\theta+A_z\cos\theta\\ (\vec{A}\cdot\vec{e_2}) &\overset{d}{\equiv} rA^2=(A_x\cos\varphi+A_y\sin\varphi)\cos\theta-A_z\sin\theta\\ (\vec{A}\cdot\vec{e_3}) &\overset{d}{\equiv} r\sin\theta A^3=-A_x\sin\varphi+A_y\cos\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(14.8)$$

となる（これは A^1, A^2, A^3 の定義である).

(14.8) から

$$(\vec{A})^2=\sum_{k=1}^{3}(\vec{A}\cdot\vec{e_k})^2=(A^1)^2+r^2(A^2)^2+(r\sin\theta)^2(A^3)^2$$
$$=g_{\mu\nu}A^\mu\cdot A^\nu$$

となる．$g_{\mu\nu}$ は (14.1) にあたえられているものである．

この $A^\mu(\mu=1,\ 2,\ 3)$ は次のようにしても求められる．すなわち，反変テンソルの変換規則にしたがえば

$$A^\mu\equiv\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}}A^{\nu'}(x')$$

この変換式で，x^μ－系を曲座標系，$x^{\nu'}$－系を直交座標系と考えれば上の (14.8) で定義された (A^1, A^2, A^3) が導き出される．

さて点 P から，これに接近した点Q（その座標を $r+\delta r,\ \theta+\delta\theta,\ \varphi+\delta\varphi$）まで，ベクトル$A$を平行移動させたとする．ユークリッド幾何学では，平行移動させても，ベクトルの直交成分の値は変わらないから，A_x, A_y, A_z は不変である．それゆえ $A^\mu(Q)_{/\!/}$ は，(14.8) の ($r,\ \theta,\ \varphi$) を ($r+\delta r,\ \theta+\delta\theta,\ \varphi+\delta\varphi$) に変えれば求められる．そこでいま $A^\mu(\mu=1,\ 2,\ 3)$ の変化の様子を調べよう．

$$\delta A^\mu\overset{d}{\equiv}A^\mu(r+\delta r,\ \theta+\delta\theta,\ \varphi+\delta\varphi)_{/\!/}-A^\mu(r,\ \theta,\ \varphi)\overset{d}{\equiv}A^\mu(\mathrm{Q})_{/\!/}-A^\mu(\mathrm{P})$$

とおくと，(14.8) から

$$\delta A^1=(-A_x\sin\varphi+A_y\cos\varphi)\sin\theta\cdot\delta\varphi+(A_x\cos\varphi+A_y\sin\varphi)\cos\theta\cdot\delta\theta-A_z\sin\theta\cdot\delta\theta$$
$$=r\sin^2\theta\cdot A^3\cdot\delta\varphi+rA^2\cdot\delta\theta\qquad(14.9)$$

同様に

$$r\delta A^2+\delta r\cdot A^2=(-A_x\sin\varphi+A_y\cos\varphi)\cos\theta\cdot\delta\varphi$$
$$+\{-(A_x\cos\varphi+A_y\sin\varphi)\sin\theta-A_z\cos\theta\}\,\delta\theta$$

そこで

$$\delta A^2=-\frac{\delta r}{r}A^2+\sin\theta\cdot\cos\theta A^3\cdot\delta\varphi-\frac{A^1}{r}\delta\theta\qquad(14.10)$$

最後に

$$\delta A^3=-\frac{\delta r}{r}A^3-A^3\cot\theta\cdot\delta\theta-\left(\frac{A^1}{r}+A^2\cot\theta\right)\cdot\delta\varphi\qquad(14.11)$$

ところで一般論によると，

$$\delta A^{\mu} \overset{d}{\equiv} A^{\mu}(r+\delta r,\ \theta+\delta\theta,\ \varphi+\delta\varphi)_{/\!/} - A^{\mu}(r,\ \theta,\ \varphi) = -A^{\nu}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\cdot\delta x^{\rho}$$

この右辺の Γ に (14.3) を代入すると，

$$\delta A^{1} = -A^{2}\Gamma^{1}_{22}\delta\theta - A^{3}\Gamma^{1}_{33}\delta\varphi = rA^{2}\delta\theta + r\sin^{2}\theta\cdot A^{3}\delta\varphi$$

$$\delta A^{2} = -A^{2}\Gamma^{2}_{21}\delta r - A^{1}\Gamma^{2}_{12}\delta\theta - A^{3}\Gamma^{2}_{33}\delta\varphi = -\frac{A^{2}}{r}\delta r - \frac{A^{1}}{r}\delta\theta + \sin\theta\cdot\cos\theta A^{3}\delta\varphi$$

$$\delta A^{3} = -A^{3}\Gamma^{3}_{31}\delta r - A^{3}\Gamma^{3}_{32}\delta\theta - A^{1}\Gamma^{3}_{13}\delta\varphi - A^{2}\Gamma^{3}_{23}\delta\varphi$$

$$= -\frac{A^{3}}{r}\delta r - A^{3}\cot\theta\cdot\delta\theta - \frac{A^{1}}{r}\delta\varphi - A^{2}\cot\theta\cdot\delta\varphi$$

これらの結果は (14.9)～(14.11) と完全に一致する．このことからわれわれが考えた平行移動の定義は，ユークリッド空間のときはよく知っている平行移動の概念と完全に一致することがわかる．

最後に3次元空間の場合の曲率テンソルについての特殊な事情を 1，2 述べて，テンソル解析についての説明をおえることにする．

3次元空間の Riemann-Christoffel テンソルについても 44 ページに述べた (i)～(iv) のような関係は成立する．しかし3次元の場合には，(iv) の関係は (i)～(iii) から必然的にでてくる．そのために (iv) は曲率テンソルに対する独立な制限とはならない．そこで3次元曲率テンソルの0でない独立な成分の数は，一般には6個である．さらに3次元の場合には

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu,\nu = 1,2,3)$$

ならば

$$R_{\alpha\beta,\mu\nu} = 0$$

が成立する．(この逆が成立することは自明である) このことは，局所的に $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ となるような測地系を使って容易に証明できる．

第 III 章　一般相対論的力学ならびに電磁気学

§ 15. 質点の運動方程式

ここでは重力場の時間的，空間的なふるまいがわかっているとしたとき，その影響をうけて質点がどのような運動をするかを調べてみよう．重力のポテンシャルは，第 I 章で説明したように $g_{\mu\nu}(x)$ によって表わされる． そこで時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ があたえられているとしたときに，このなかでの質点の運動方程式を求めることがこの節の課題である． それでは $g_{\mu\nu}(x)$ はいったいどうして決められるのか． これは物質の分布がわかっているときに，そのまわりにどんな重力場が存在するかという問題である． これは重力場の方程式を解くことによってその解答があたえられる． この問題は次の章で議論される．

さて，§ 2 で述べたように，すべての物理現象への重力の影響を正しく公式化するのに，等価原理と一般相対性原理とは欠くことのできない指導原理である．質点の運動方程式を求めるにしても，また後に述べる電磁場の方程式を導くのにも，議論の筋道は次のようなものである．まず重力の影響のないときは，特殊相対論が成立する．そのようなときには物理法則がどんな数式で表現されるかはわかっている． そこで，この数式を一般相対性原理の要求にそうように書き直す．それには，この上述の数式を出発点として，これに一般の座標変換をほどこせばよい．その結果は，一般の座標変換に対して不変な形になり，その式の中には $g_{\mu\nu}(x)$ が含まれる． そこで等価原理を用いて， この $g_{\mu\nu}$ を重力のポテンシャルと解釈する．このようにして重力との相互作用を一意的に導き出すことができる．

さて，任意の座標系からみたときの質点の座標を x^μ とする．質点の運動の歴史は， 4 次元時空のなかの 1 本の曲線で表わされる．この曲線は質点の **世界線** と呼ばれ，次のような式で表わされる．

$$x^\mu = f^\mu(s) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

s は質点の歴史を示すパラメーターで，座標系の取り方に無関係なものを使用するのが便利である．たとえば，世界線上の特定な点から曲線にそって測った長さを s として用いてもよい． f^μ が s のどんな関数であるかを決めるのが運動方程式の役割である．

さて，上に述べた議論の筋道にしたがって，いまある瞬間に一時的に質点が無重力状態におかれるような適当な座標系を考えよう．この新しい座標系からながめたときに，質点の世界線が

$$X^{\mu}=F^{\mu}(s) \qquad (\mu=0,\ 1,\ \cdots,\ 3)$$

で表わされるものとする．パラメーター s が s_0 という特別な値になったときの質点の座標を

$$X^{\mu}(s_0)=F^{\mu}(s_0)$$

とする（この点を P と呼ぶことにしよう）．この P の 4 次元的近傍（つまり空間的に近傍であるばかりでなく，時間的にも P の近く）が局所的に無重力な領域となるように，X－座標系が具合よく選ばれたとする．このような座標系は第 I 章で述べた P 点における局所慣性系にほかならない．

ところで，$g_{\mu\nu}$ は重力のポテンシャルに相当するから，その微分で示されるアフィン係数 Γ は重力そのものに対応する．Newton の理論に出てくる重力，つまりわれわれのよく知っている重力が，Γ とどんな関係にあるかを数式的にはっきりと示すことはあとにゆずる．さて，上述の局所慣性系では P 点の近傍は無重力地帯であるから，そこでは Γ が 0 となる．このことから，局所慣性系とは P 点における測地系にほかならない（§13 参照）．

さて，局所慣性系からみれば，少なくとも P 点の近くでは特殊相対論が成立する．それゆえ，重力以外の外力がなにも働いていない質点の方程式は

$$\frac{d^2X^{\mu}(s)}{ds^2}=0 \qquad (s\approx s_0) \tag{15.1}$$

となる．

この式をもとの一般の座標系からながめると，

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)=\frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2}+\frac{\partial^2X^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{dx^{\nu}}{ds}\cdot\frac{dx^{\lambda}}{ds}=0$$

または両辺に $\dfrac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\mu}}$ を掛けて

$$\frac{d^2x^{\rho}}{ds^2}+\frac{\partial^2X^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\mu}}\cdot\frac{dx^{\nu}}{ds}\cdot\frac{dx^{\lambda}}{ds}=0 \tag{15.2}$$

ところで，$g_{\mu\nu}(x)$ および $g^{\mu\nu}$ は (3.3) からもわかるように

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}},\quad g^{\mu\nu}=\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\alpha}}\cdot\frac{\partial x^{\nu}}{\partial X^{\beta}}$$

これを Γ の定義式 (12.5)′ に代入すると

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}(x)=\frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\alpha}}\cdot\frac{\partial^2X^{\alpha}}{\partial x^{\nu}\cdot\partial x^{\lambda}} \tag{15.3}$$

となる．そこで，(15.2) は

$$\frac{d^2x^{\rho}}{ds^2}+\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}(x)\cdot\frac{dx^{\nu}}{ds}\cdot\frac{dx^{\lambda}}{ds}=0 \tag{15.2$'$}$$

となる．これが任意の座標系からみたときの質点の運動方程式である．この式はある特別な点，つまりパラメーター s が s_0 という値をとる点の近くで成り立つ式であるが，s_0 としてはどんな値でもよいのであるから，結局 (15.2)′ は質点の世界線の満足すべき方程式である．これは重力以外のすべての外力が働いていないときの方程式，つまり一般相対論における“自由粒子”の方程式である．ここで“自由粒子”というときは，重力の作用だけは存在してもかまわない．等価原理のおかげで，局所的には重力の作用をうけている粒子と，重力も含めてすべての力の影響をうけていない粒子とは区別できないからである．なお，(9.8) の x'－系を唯今の任意の座標系 x と考え，また (9.8) の x－系を唯今の測地系 X と考えると，(9.8) と (15.3) とは同じものになる．なぜかというと，(9.8) の右辺第1項の Γ は測地系の $\Gamma(X)$ であるから 0 となるためである．また，(9.8) の第2項は少し書きかえると (15.3) と完全に一致する．

さて，質点の世界線の切線ベクトルを

$$v^{\mu}=\frac{dx^{\mu}(s)}{ds}$$

とする．いま，あるベクトル場を $V^{\mu}(x)$ とする．曲線 $x^{\mu}(s)$ に沿っての V^{μ} の共変微分を

$$\frac{\delta V^{\mu}}{\delta s}\overset{d}{\equiv}\left[\frac{dx^{\rho}}{ds}\cdot\nabla_{\rho}V^{\mu}\right]_{x=x(s)}$$

と定義する．もし曲線 $x(s)$ 上における V^{μ} を

$$v^{\mu}(s)=[V^{\mu}(x)]_{x=x(s)}$$

とおくと，(15.2)′ は

$$\frac{\delta v^{\mu}(s)}{\delta s}\overset{d}{\equiv}v^{\rho}(s)\cdot[\nabla_{\rho}V^{\mu}(x)]_{x=x(s)}=0 \qquad (15.2)''$$

となる．この結果から，(15.2)′ の左辺は座標変換に対して反変ベクトルとしてふるまい，その形は座標系の取り方に無関係であることがわかる．

(15.2)′ はまた別の考え方からも導き出すことができる．Newton の力学でも，また特殊相対論でも，外力の作用をうけない自由粒子は4次元時空のなかで直線を描く．特殊相対論的にいうならば，時空内の点 P から他の点 Q に質点が達する場合に，それの描く道は PQ を結ぶいろいろの道筋のなかで，所要時間（正確にいうと proper time）が最も短くなるような道筋である．つまり，proper time を

$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}dX^{\alpha}dX^{\beta}}=\frac{1}{c}\sqrt{(dX^{0})^{2}-(d\vec{X})^{2}}$$

とおくと，

$$I(\mathrm{Q},\mathrm{P})=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}d\tau$$

が極小となるような道筋が自由粒子のたどる道である．

この考えをそのまま一般化すると，任意の座標系からみて質点の軌道は

$$I(\mathrm{Q},\mathrm{P})=\frac{1}{c}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\cdot dx^{\mu}\cdot dx^{\nu}}$$

を極小にするような $x^{\mu}=f^{\mu}(s)$ であたえられることになる．上の積分は，パラメーター s を使うと

$$I(\mathrm{Q},\mathrm{P})=\frac{1}{c}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{dx^{\mu}}{ds}\cdot\frac{dx^{\nu}}{ds}}\cdot ds$$

となる．そこでこれは変分法の問題にほかならない．つまり，I を極小にするには上の I の x についての変分から導かれる Euler の方程式

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\sqrt{\quad}}{\partial\left(\dfrac{dx^{\mu}}{ds}\right)}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{\quad}\right)=0,\qquad \sqrt{\quad}\overset{d}{\equiv}\sqrt{-g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\cdot\frac{dx^{\beta}}{ds}}$$

を満足するように x^{μ} を決めればよい．この式は具体的に書くと

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-g_{\mu\nu}\dfrac{dx^{\nu}}{ds}}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dfrac{dx^{\alpha}}{ds}\cdot\dfrac{dx^{\beta}}{ds}}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}}\cdot\dfrac{dx^{\rho}}{ds}\cdot\dfrac{dx^{\sigma}}{ds}}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dfrac{dx^{\alpha}}{ds}\cdot\dfrac{dx^{\beta}}{ds}}}=0$$

いまパラメーター s として，特別に，質点の世界線自身の長さを採用すると

$$ds=\sqrt{-g_{\alpha\beta}\cdot dx^{\alpha}\cdot dx^{\beta}}=\sqrt{-g_{\alpha\beta}\cdot\frac{dx^{\alpha}}{ds}\cdot\frac{dx^{\beta}}{ds}}\cdot ds$$

つまり，上の Euler の式の分母に出てくる $\sqrt{\quad}$ は 1 とおくことができる．そこで結局

$$-g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{dx^{\lambda}}{ds}\cdot\frac{dx^{\nu}}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{dx^{\rho}}{ds}\cdot\frac{dx^{\sigma}}{ds}=0$$

これを整理すると，Γ の定義

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\rho}}-\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

を使って (15.2)′ となる．

幾何学では，このような曲線を**測地線**と呼ぶ．これは，ユークリッド幾何学における“直線”の概念の一般化されたものである．以上のことから，重力の影響をうけて運動している質点の軌跡は，4 次元時空内の測地線であるということになる．

以上の考えは光線の方程式を求めるのにも役立つ．ただ，光線の方程式は (15.2)′ で

あたえられる4次元時空内の測地線であるばかりでなく，無重力状態では，光速度は c に等しいという制限がつく．そのために光の道筋にそって

$$-ds^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu \cdot dx^\nu = 0 \tag{15.4}$$

という条件がつく．したがってこの場合には (15.2)′ にでてきた s は光線にそって測定した長さと考えてはならない．

ここで注意すべきことがある．光線の方程式は4次元時空の中の測地線であるが，3次元空間の中の測地線には必ずしもならない．重力場が時間的に変化しない，いわゆる静的重力場のときでさえも，光の道筋は，3次元空間の中の測地線とは異なる．太陽からの重力場の影響をうけて，恒星からくる光が彎曲するという現象は，まさにこの事実による．

§ 16.　Newton の方程式との比較

§ 15 で求めた質点の方程式が，われわれのよく知っている Newton 力学に出てくる運動方程式の拡張になっているのかどうかを調べてみよう．このことはまた同時に Γ の解釈をもあたえてくれる．

まず，重力場の作用をうけて運動している質量 m の質点の運動方程式は，Newton 力学によれば

$$m\frac{d^2x^k}{dt^2} = -m\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{16.1}$$

である．ここに Φ は重力場のポテンシャル，また時刻 t における質点の直交座標を $x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$ とした．

ところで (15.2)′ が，適当な条件のもとには，近似的に (16.1) の形に書き表わされることを示そう．それにはまず，ある瞬間，質点のある場所の近くで近似的に測地系を設置する．そして $x^0=ct$ とおいて，この t を Newton 力学における時間と同じものとみなす．また，x^1, x^2, x^3 もそれぞれ Newton 力学における質点の直交座標と同一視する．そのうえで次のことを仮定する．

(i)　上に述べたような特別な座標系から見たとき，$g_{\mu\nu}(x)$ は近似的に $\eta_{\mu\nu}$ に等しいとする．つまり

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

とおくときに，少なくとも質点の近くでは，またいま問題にしている瞬間（これをたとえば $t=0$ とする）の前後では，

$$|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$$

とする．

(ii)　重力場は静的であるとする．つまり，$h_{\mu\nu}(x)$ は x^0 に無関係とする．

(iii)　この座標系からみたとき，質点の3次元的速度 $\vec{v}$ は

$$\left|\frac{\vec{v}}{c}\right| \equiv \left|\frac{d\vec{x}}{dx^0}\right| \ll 1$$

を満足するものとする．

このような仮定が許されるためには，重力場が質点のある場所の近くで，時間的に不変であるばかりでなく，空間的にもあまり激しく変化しないことが必要である．このような性質のよい重力場のときには，質点のまわりのある程度のひろがりをもった4次元的領域のなかが，近似的に Minkowski 型の時空とみなされるからである．

さて，仮定 (i) および (iii) から

$$ds \approx \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-|d\vec{x}|^2 + c^2(dt)^2} = (cdt)\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right\}}$$
$$\approx (cdt)$$

また，仮定 (iii) から

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1, \qquad \left|\frac{dx^k}{ds}\right| \approx \frac{1}{c}|v^k| \ll 1 \quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

そこで，質点の運動方程式 (15.2)′ は近似的に

$$\frac{d^2x^k}{c^2dt^2} + \Gamma^k_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \approx \frac{1}{c^2}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{00} \approx 0 \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{16.2}$$

となる．

さて，Γ の定義から

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}g^{k\mu}\left(2\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\right)$$

ところで，仮定 (i) から

$$g^{\mu\nu} \cong \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}(x)$$

となるから，h の2次以上の項を無視することにすれば，仮定 (ii) も使うと

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \tag{16.3}$$

となる．これを (16.2) に代入すると

$$m\frac{d^2x^k}{dt^2} \cong \frac{m}{2}c^2\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \tag{16.4}$$

そこで，この右辺を (16.1) と比べると

$$h_{00}(x^1,\ x^2,\ x^3) = -\frac{2}{c^2}\varPhi \tag{16.5}$$

すなわち

$$g_{00}(x) = \eta_{00} - \frac{2}{c^2}\varPhi(x) \tag{16.5$'$}$$

となる．また，$\varGamma$ については近似的に

$$\varGamma^k_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varPhi}{\partial x^k} \tag{16.6}$$

という関係式が出てくる．

(16.5)$'$ はすでにわれわれが知っているものである．すなわち，第 I 章の (4.4) は，(16.5)$'$ の特別な場合である．(16.6) は，$\varGamma^k_{00}$ が重力そのものを意味することを示している．

このように $\varGamma$ の解釈がわかると，(15.2)$'$ は重力場の測定法を教えてくれるように思われる．すなわち (15.2)$'$ の第一項つまり質点の“加速度”を観測することによって，(15.2)$'$ から $\varGamma$，つまり重力の強さが測定できるように思われる．このような方法は，伝説によると Newton が重力の存在を発見したときに用いたものである．Newton は質点の代わりにリンゴの落下運動を観測して，地球の重力を発見したことになっている．

しかし，この話は一般相対論の立場から考えると正しくない．何度も述べたように，$\varGamma$ はテンソルではないから，座標系の取り方によっては $\varGamma$ を 0 とすることもできるから，$\varGamma$ が 0 か否かでは重力の存否を判断できない．Newton の発見したものは地球の重力ともいえるが，また地面の加速度運動によるための見かけの重力かもしれない．ほんとに重力であることを確かめるためには，曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}$ が 0 か否かを調べねばならない．

いままで述べてきたことは，静的重力場の場合であった．もし重力場が時間 $t = x^0/c$ に依存するときは，$\varGamma^k_{00}$ は (16.3) の代わりに

$$\varGamma^k_{00} \approx \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \tag{16.3$'$}$$

となるから，運動の方程式は

$$m\frac{d^2x^k}{dt^2} = mc^2\left\{-\frac{\partial h_{k0}}{\partial x^0} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}\right\}$$

$$= m\left\{-\frac{\partial \gamma_k}{\partial t} - \frac{\partial\varPhi}{\partial x^k}\right\}$$

ただし

$$\gamma_k = c\cdot h_{k0} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{16.7}$$

3次元ベクトルの記号を使うと

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=m\left\{-\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\Phi\right\}\tag{16.8}$$

この右辺は，電磁場のなかを運動する電荷 e のうける力とよく似ている．すなわち電荷の速度が 0 の瞬間には，そのうける力は

$$e\vec{E}=e\left\{-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\phi\right\}\tag{16.8$'$}$$

である．$\vec{A}$, ϕ, はそれぞれ電磁場のベクトル，ならびにスカラーポテンシャルとよばれる．これにならって，重力の場合にも，$\vec{\gamma}$ を**重力場のベクトルポテンシャル**，Φ を**重力場のスカラーポテンシャル**という．

この類似性は，質点の速度 $\vec{v}$ に比例する項をも考えに入れると，もっとはっきりする．(16.2) をだすときに，

$$\Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}=\Gamma^k_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+2\sum_{l=1}^{3}\frac{dx^0}{d\tau}\cdot\frac{dx^l}{d\tau}\cdot\Gamma^k_{0l}$$

$$+\sum_{l,m=1}^{3}\frac{dx^l}{d\tau}\cdot\frac{dx^m}{d\tau}\Gamma^k_{lm}$$

において，右辺の第2項までとることにすれば

$$\Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\cong c^2\Gamma^k_{00}+2c\cdot\sum_{l=1}^{3}v^l\cdot\Gamma^k_{l0}$$

$$\cong\frac{\partial\gamma_k}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}+\sum_{l=1}^{3}\left\{v^l(\partial_l\gamma_k-\partial_k\gamma_l)+v^l\frac{\partial h_{lk}}{\partial t}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial t}+\mathrm{grad}\,\Phi-(\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{\gamma})\right\}_k+\sum_{l=1}^{3}v^l\frac{\partial h_{lk}}{\partial t}$$

そこで質点の方程式はつぎのようになる．

$$m\frac{d^2x^k}{dt^2}=m\{\vec{e}+\vec{v}\times\vec{b}\}_k-m\sum_{l=1}^{3}v^l\cdot\frac{\partial h_{lk}}{\partial t}\tag{16.9}$$

ここで，次のような記号を使った．

$$\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt},\qquad\vec{e}=-\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\Phi,\qquad\vec{b}=\mathrm{rot}\,\vec{\gamma}$$

ところで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ には，つぎのような関係が成立する

$$\sum_{l=1}^{3}g^{kl}\left(g_{lm}-\frac{g_{l0}\cdot g_{m0}}{g_{00}}\right)=\delta^k_m\qquad(k,\ m=1,\ 2,\ 3)$$

そこで

$$v^k\overset{d}{\equiv}\frac{dx^k}{dt},\qquad v_l\overset{d}{\equiv}\sum_{k=1}^{3}\left(g_{lk}-\frac{g_{l0}\,g_{k0}}{g_{00}}\right)v^k\tag{16.10}$$

と定義すれば，逆に

$$v^k = \sum_{l=1}^{3} g^{kl} v_l$$

ところで，いま考えている近似においては，h の2次またはそれ以上の小さい量は無視するから

$$g^{kl} = \eta^{kl} - h_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

$$g_{kl} - \frac{g_{k0} g_{l0}}{g_{00}} = \eta_{kl} + h_{kl}$$

$$v_k = v^k + \sum_{l=1}^{3} h_{kl} v^l$$

そこで，この最後の関係式から

$$\frac{dv^k}{dt} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} = \frac{dv_k}{dt} - \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{\partial h_{kl}}{\partial t} \cdot \frac{dx^l}{dt} + h_{kl} \frac{d^2 x^l}{dt^2} \right)$$

(16.9) から，d^2x^l/dt^2 は h の1次の量であるから，上の式の右辺の最後の項は無視してよい．そこでこれを (16.9) に代入すると，右辺の最後の項は相殺して

$$m \frac{dv_k}{dt} = m \{ \vec{e} + \vec{v} \times \vec{b} \}_k \tag{16.11}$$

この右辺の形は電荷にはたらく Lorentz 力と全く同じ形である．

§ 17. 永久重力場の測定

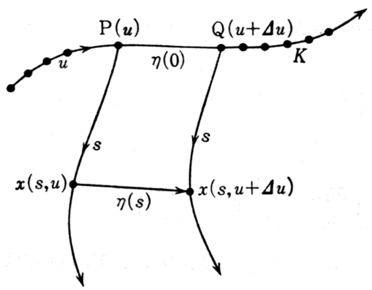
前節で述べたように，永久重力場の存在を確かめるのには曲率テンソルを測定しなければならない．等価原理をうのみにすると，たとえ永久重力場があっても適当に座標系を選択すれば，その影響をすべて消し去ることができるように思われる．このことは実は正しくない．つまり，等価原理にも適用の限界があることに留意すべきである．

等価原理は数学的にいいかえれば結局次のことである．すなわち，永久重力場があっても，時空内の任意の1点で座標系を上手にえらべば，その点における Γ(つまり重力自身) のすべての成分をいっきょに0とすることもできるし，あるいは Γ に勝手な値をとらせることもできる．このことは Γ がテンソルではないということに由来する．しかし，曲率テンソル R についてはそうはいかない．ある座標系からみて $R^{\mu}{}_{\nu,\rho\sigma}$ のどれか1つの成分が0でなかったならば，どんな系からみても $R^{\mu}{}_{\nu,\rho\sigma}$ の全成分をいっきょに0とすることはできない．

つまり等価原理が成り立つのは $g_{\mu\nu}$ の1階微分まで，すなわちΓが関与する現象に限られる．Γ の微分，つまり曲率テンソル $R^{\mu}{}_{\nu,\rho\sigma}$ が顔を出す現象では，“見かけの重力”と永

久重力とはRの0か否かによって座標系に無関係にはっきりと区別される．つまりこのような現象では両種の重力の“等価”は成り立たないことに注意すべきである．(§ 41．参照)

そこで，真の重力の測定をするのには，Γの微分がでてくるような現象を利用しなければならない．それには，たとえば互いにごく接近している2個の質点の自由落下現象を観測すればよい．



第 3 図

いま，**第3図**に示されているように，1本の曲線 K の上にたくさんの質点がならんでいるものとする．質点の K の上での位置を示すパラメーターとして，たとえば曲線 K の左端からその質点の位置までの長さuを使うことにする．たとえば，K上の任意のとなりあった2個の質点を P，Q，それの位置を u および $u+\Delta u$ とする．K 上のすべての質点が，たとえば，初速度0でいっせいに重力の影響をうけて自由落下をはじめたとする．各質点は前節に述べたように，それぞれ測地線にそって落下するから，これらの測地線の全体は1枚の2次元的な曲面をつくる．各質点の運動を示すパラメーターとしては，その質点の世界線（つまり測地線）にそった長さ s を使う．$s=0$ のとき，質点はスタートライン K の上にあるものとする．

さて，上に考えた代表的2点 P，Q の落下運動をしらべてみよう．これら2個の質点の測地線をそれぞれ $C(u)$，および $C(u+\Delta u)$ と呼ぶことにする．$C(u)$ 上の質点の位置を $x(s,u)$, $C(u+\Delta u)$ 上のそれを $x(s,u+\Delta u)$ で示そう．いま，ある“瞬間” s における PQ 間の“へだたり”を

$$\eta^\mu(s)=x^\mu(s,u+\Delta u)-x^\mu(s,u)=\frac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial u}\cdot\Delta u \tag{17.1}$$

とおいて，これが s と共にどのように変化するかをしらべてみよう．

まず，§ 15 から $C(u)$ にそって測地線の方程式

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial s}\right)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial^2 x^\mu(s,u)}{\partial s^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)\cdot\frac{\partial x^\alpha(s,u)}{\partial s}\cdot\frac{\partial x^\beta(s,u)}{\partial s}=0 \tag{17.2}$$

が成り立つ．$x^\mu(s,u+\Delta u)$ についても，$C(u+\Delta u)$ にそって，(17.2) と同じような式が成り立つ．そこで，両者の差をとると，

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial x^\mu(s,u+\Delta u)}{\partial s}\right)-\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial s}\right)=\Delta u\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial s}\right)\right\}$$

$$=\Delta u\left\{\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial u\partial s^2}+\frac{\partial\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial u}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial s}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial s}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u\partial s}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial s}\right.$$

$$\left.+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial u\partial s}\right\}=0$$

これに（17.1）の定義を使うと

$$\frac{\partial^2\eta^\mu}{\partial s^2}+\frac{\partial\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\cdot\eta^\nu\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial s}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial s}+2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial s}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial s}=0 \tag{17.3}$$

となる．ところで，ベクトル η^μ の曲線 C(u) にそった共変微分は

$$\frac{\delta\eta^\mu}{\delta s}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\eta^\mu}{\partial s}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial s}\cdot\eta^\sigma$$

$$\frac{\delta^2\eta^\mu}{\delta s^2}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\delta\eta^\mu}{\delta s}\right)+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial s}\cdot\frac{\delta\eta^\sigma}{\delta s}$$

$$=\frac{\partial^2\eta^\mu}{\partial s^2}+\frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial s}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial s}\cdot\eta^\sigma+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial s^2}\eta^\sigma$$

$$+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial s}\cdot\frac{\partial\eta^\sigma}{\partial s}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial s}\left(\frac{\partial\eta^\sigma}{\partial s}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial s}\cdot\eta^\beta\right)$$

である．これらの式と（17.2）を使うと，（17.3）は

$$\frac{\delta^2\eta^\mu}{\delta s^2}+R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial s}\cdot\eta^\rho\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial s}=0 \tag{17.4}$$

となる．

（17.4）の第2項には曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}$ が顔を出している．そこで，永久重力場が存在することを確かめるのには，任意の座標系でよいから，η^μ を観測して，$\delta^2\eta^\mu/\delta s^2$ の4個の成分のなかの少なくともどれか1つが0でないことを見つければ十分である．なぜならば，（17.4）の第1項も第2項も共にそれぞれベクトルであるから，その各成分がすべて0であるか否かということは，座標系の取り方には無関係である．

§ 18. 電磁場の方程式

まず，特殊相対論における電磁場の方程式について復習をしよう．真空中の電場の強さを $\vec{E}(x,t)$，磁束密度を $\vec{B}(x,t)$ とする．また，電束密度および磁場の強さをそれぞれ $\vec{D}(x,t)$，$\vec{H}(x,t)$ とおく．これらの間には

$$\vec{D}(x,t)=\varepsilon_0\vec{E},\qquad \vec{B}=\mu_0\vec{H}$$

という比例関係がある．ε_0 は M·K·S 有理単位系で

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}.$$

また，μ_0 については

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2 \text{（}c = \text{真空中の光速度）}$$

という関係がある．

ところで，ベクトルポテンシャルを $\vec{A}$，スカラーポテンシャルを ϕ とすると，これを一緒にして4元ポテンシャル A_μ が定義される．すなわち

$$A_0 = -\phi/c,\ \ A_1 = A_x,\ \ A_2 = A_y,\ \ A_3 = A_z$$

のように定義する．$\vec{E}$, $\vec{B}$ はこれを使うと

$$E_k = cf_{k0} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$B_x = f_{23}, \qquad B_y = f_{31}, \qquad B_z = f_{12}$$

と書ける．ここに $f_{\mu\nu}$ は

$$f_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{18.1}$$

のことである．

Maxwell の方程式は次の2組の方程式になる．すなわち

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \tag{18.2}$$

および

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu f^{\mu\nu} = j^\mu \tag{18.3}$$

となる．ここに j^μ は4元電流ベクトルと呼ばれ，電荷密度 ρ，電流密度 $\vec{j}$ と

$$(j^0 = c \cdot \rho, \quad j^1 = j_x, \quad j^2 = j_y, \quad j^3 = j_z) \tag{18.4}$$

で結ばれる．また，特殊相対論では $f^{\mu\nu}$ は

$$f^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} f_{\alpha\beta} \tag{18.5}$$

によって定義される．

(18.3) は次のような作用積分 I から変分法で導き出される．すなわち

$$I = \int L(A_\mu,\ \partial_\nu A_\mu) d^4 x. \tag{18.6}$$

ここに Lagrange 関数 L は

$$L(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{4\mu_0} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \tag{18.7}$$

である．また $f_{\mu\nu}$ は (18.1) であたえられるものとする．(18.6) の A_μ についての変分をとると，つまり A_μ についての Euler 方程式を求めると，それがまさに Maxwell の方程式 (18.3) である．この場合，$f_{\mu\nu}$ を (18.1) で定義したために (18.2) は恒等的

に成り立つから考える必要はない.

もし，4元ポテンシャルに Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{18.8}$$

をつけると，Maxwell の方程式は

$$\frac{1}{\mu_0}\partial_\mu\partial^\mu \cdot A^\nu \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{\mu_0}\Box A^\nu = -j^\nu \tag{18.9}$$

となる.

一方，(18.3) の両辺に ∂_μ を作用させると，$f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$ のために左辺は恒等的に 0 となる．そこで，(18.3) が矛盾を含まないためには

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{18.10}$$

が成立していなければならない．これは普通の3次元的記号で書けば

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \tag{18.10$'$}$$

となる．すなわち，電荷の保存則を示すもので電流の連続方程式と呼ばれるものである．(18.10)，(18.9) から，(18.8) の条件が場の方程式 (18.9) と両立していることがわかる.

(18.9) を作用積分から変分法で導き出すのには，Lagrange 関数 L を

$$L \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{4\mu_0} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu A^\mu)^2 + j^\mu A_\mu \tag{18.11}$$

にすればよい.

いままで述べてきたことは，すべて特殊相対論の枠(わく)のなかでの話である．これを一般の座標変換に対しても，その形が不変となるように書き直すのには，§ 15 の議論からもわかるように次の手順にしたがえばよい.

(特殊相対論的テンソル) → (一般座標変換に対するテンソル)

$(\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}) \to (g_{\mu\nu}(x), g^{\mu\nu}(x))$,

∂_μ(普通の微分) → ∇_μ(共変微分).

最後に，作用積分 I が一般座標変換に対しても不変量，すなわちスカラーとなるためには，Lagrange 関数をスカラー密度に書きかえねばならない．それには，L の代わりに

$$\sqrt{-g}\cdot L \stackrel{d}{\equiv} \mathfrak{L}$$

とする必要がある.

ところで (9.12) から，一般座標変換に対しても

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

はテンソルである．そこで，Lagrange 関数として

$$\mathfrak{L}=\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{4\mu_0}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta}-\frac{1}{2\mu_0}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu A_\nu)^2+j^\mu A_\mu\right\} \tag{18.12}$$

をとればよい．もし Lorentz 条件を使わないならば

$$\mathfrak{L}'=\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{4\mu_0}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta}+j^\mu A_\mu\right\} \tag{18.12$'$}$$

とすればよい．

(18.12)′ から変分法によって Maxwell の方程式を出すと次のようになる．

$$-\partial_\nu(\sqrt{-g}f^{\mu\nu})+\mu_0\cdot\sqrt{-g}\cdot j^\mu=0 \tag{18.13}$$

ここで，

$$f^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\alpha\beta}=\nabla^\mu A^\nu-\nabla^\nu A^\mu=-f^{\nu\mu}$$

とした．(18.13) の両辺に ∂_μ を掛けると，

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\cdot j^\mu)=0 \tag{18.14}$$

となる．これは (18.10) の一般相対論的拡張である．

ところで，(18.13) を普通によく知られている3次元的記法と対応させるには

$$\left.\begin{aligned}&D_k=c\varepsilon_0\sqrt{-g}f^{0k} \quad (k=1,2,3)\\ &H_1=c^2\varepsilon_0\sqrt{-g}f^{23}=\frac{1}{\mu_0}\sqrt{-g}f^{23} \quad (1,2,3\ \text{について順換させる})\end{aligned}\right\} \tag{18.15}$$

とおけばよい．電流，電荷密度についても

$$\rho=\frac{1}{c}\sqrt{-g}\cdot j^0,\quad \vec{j}=\left(\sqrt{-g}\cdot j^1,\ \sqrt{-g}\cdot j^2,\ \sqrt{-g}\cdot j^3\right)$$

となる．

(18.15) からわかるように，一般相対論の立場からみると，$(\vec{D},\ \vec{H})$ と $(\vec{E},\ \vec{B})$ とはその変換性が全く異なる．$(\vec{B},\ \vec{E})$ はテンソルであるが，$(\vec{D},\ \vec{H})$ はテンソル密度である．普通の電磁気学の教科書では，物質中の電磁場について

$$\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{M}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}$$

のような関係がでてくるが，これはせいぜい特殊相対論の枠の中で，しかも proper Lorentz 変換のみを考えるときには意味がある．しかし一般相対論の立場からみれば，これらの関係式は座標変換に対して不変でないから，一般相対性原理に反する．

もし Lorentz 条件

$$\nabla_\mu A^\mu=0$$

を使うならば，(18.12) の A_μ についての変分をとればよい．その結果は

$$-\partial_\nu(\sqrt{-g}f^{\mu\nu})+\partial_\nu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\nabla_\rho A^\rho)$$
$$+\sqrt{-g}\cdot g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\nabla_\rho A^\rho+\mu_0\sqrt{-g}\cdot j^\mu=0$$

となる．これを整理すると

$$\Box A^\mu+[\nabla^\mu,\nabla_\nu]A^\nu+\mu_0 j^\mu=0$$

ここに $\Box$ とは

$$\Box A^\mu \overset{d}{\equiv} g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma A^\mu$$

のことである．特殊相対論では

$$[\partial^\mu,\partial_\nu]A^\nu \overset{d}{\equiv} (\partial^\mu\partial_\nu-\partial_\nu\partial^\mu)A^\nu=0$$

となるが，共変微分では

$$[\nabla^\mu,\nabla_\nu]A^\nu=R^\mu{}_\sigma A^\sigma$$

となる．$R^\mu{}_\sigma$ は Ricci テンソルである．そこで，4元ポテンシャル A^μ に対する波動方程式は

$$\Box A^\mu+R^\mu{}_\nu\cdot A^\nu=-\mu_0 j^\mu \tag{18.16}$$

となる．

この左辺第2項には Ricci の曲率テンソルが現われるから，たとえ測地座標系を用いても永久重力場があるときには，その影響を消し去るわけにはいかない．

最後に，電磁場のエネルギー・運動量テンソル密度を導き出そう．簡単のために (18.12)′ を使う．(18.12)′ を A_α，$g_{\mu\nu}$，およびこれらの微分の関数と考える．したがって，$g^{\alpha\beta}$ は

$$g^{\alpha\rho}g_{\rho\beta}=\delta^\alpha_\beta$$

で定義される $g_{\mu\nu}$ の関数と考える．この式から

$$\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}=-(g^{\alpha\mu}\cdot g^{\beta\nu}+g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})/2$$

という関係が出てくる．行列式 $g=\det(g_{\mu\nu})$ ももちろん $g_{\mu\nu}$ の関数である．そこで g の $g_{\mu\nu}$ についての変分をとれば

$$\frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}}=g\cdot g^{\mu\nu},\quad \text{または}\quad \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}}=\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}$$

となる．同じように A^μ は

$$A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu$$

であるから $g_{\mu\nu}$ の関数である．これらのことに注意すると，

$$\frac{\delta\mathfrak{L}'}{\delta g_{\mu\nu}}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial g_{\mu\nu}}-\partial_\lambda\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\right\}=\frac{g^{\mu\nu}}{2}\mathfrak{L}'+\frac{\sqrt{-g}}{2\mu_0}g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\alpha\beta}f_{\rho\alpha}f_{\sigma\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2\mu_0} g_{\alpha\beta} f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} + \frac{g^{\mu\nu}}{2}\mathfrak{L}'$$

そこで**エネルギー・運動量テンソル密度を**

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} -2\frac{\delta\mathfrak{L}'}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{\mu\nu}\mathfrak{L}' - \frac{\sqrt{-g}}{\mu_0} g_{\alpha\beta} f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} \tag{18.17}$$

と定義する．この（0 0）成分を3次元的記号で書くと（測地系を使うならば）

$$\mathfrak{T}^0{}_0 = \frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E} + \vec{H}\vec{B}) + \rho\phi - \vec{i}\vec{A}$$

となる.*) これはまさに電荷と相互作用をしている電磁場のエネルギー密度である．(18.17)の1つの特徴は（$\mu\nu$）について対称ということである．すなわち，

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \mathfrak{T}^{\nu\mu} \tag{18.18}$$

いまこの $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ を次のように分ける．すなわち，

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \mathfrak{M}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, j^\rho A_\rho$$

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{\mu_0} f^{\mu\rho} f^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma} + \frac{g^{\mu\nu}}{4\mu_0} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\right) \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\cdot M^{\mu\nu} \tag{18.19}$$

とおく．$\mathfrak{M}$ は電磁場だけのエネルギー運動量テンソルで，電流と電磁場との相互作用は含んでいない．この $\mathfrak{M}$ は，(18.13) を使うと次のような関係式を満足することがわかる．

$$\partial_\mu \mathfrak{M}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{\rho\sigma}\cdot\partial_\nu g_{\rho\sigma} = \sqrt{-g}\, f_{\nu\mu} j^\mu \tag{18.20}$$

あるいは

$$\nabla_\mu M^\mu{}_\nu = f_{\nu\mu} j^\mu \tag{18.20$'$}$$

とも書ける．

(18.20) は，実はもっと一般的なある定理の特別な場合である．この定理については別の章でもっとくわしく説明する．（第Ⅴ章参照）

(18.20) の意味を理解するには，簡単のために重力場が存在しない場合，つまり特殊相対論の成り立つ場合が適当であろう．このようなときには，すべての時空点で，

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}, \qquad \partial_\nu g_{\rho\sigma} \to 0$$

におきかえればよい．(18.20) の両辺を，x^0 = 一定という特別な時刻において全空間にわたって積分してみる．この場合，空間の無限の遠方では，電磁場は適当にすばやく消滅すると仮定する．

---

*) 本書では，$\mathfrak{T}^0{}_0$ がエネルギー密度となるように符号を決めてある．このことは特殊相対論的に考えると，T^{00} および T_{00} はエネルギーに負号をつけたものになる．このことは，重力場の方程式の右辺の符号にひびいてくる．(19.6) の右辺に注意されたい．

上の $g_{\mu\nu}$ に対する仮定から，(18.20) の左辺第2項は0であるから

$$\partial_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}^0{}_\nu d^3x = -\iint \mathfrak{M}^k{}_\nu \cdot d\sigma_k + \iiint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-g} \cdot f_{\nu\mu} \cdot j^\mu d^3x$$

となる．この式の右辺の第1項は，$\mathfrak{M}$の3次元的 div の体積積分を Gauss の定理によって，2次元の表面積分に書きかえたもので，$d\sigma_k$ とは

$$d\sigma_1 = dx^2 dx^3, \quad d\sigma_2 = dx^3 dx^1, \quad d\sigma_3 = dx^1 dx^2$$

のことである．$d\sigma$ の積分は，3次元的な全積分領域をつつむ無限に大きな閉じた曲面上での積分である．したがって，この曲面上では電磁場が0であるという仮定からこの積分はきかない．

そこで，残った量に対して特に $\nu = 0$ ととれば

$$\partial_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}^0{}_0 d^3x = \iiint_{-\infty}^{\infty} \{\sqrt{-g} f_{0\mu} j^\mu\} d^3x \tag{18.21}$$

3次元的ベクトル記号で書くと，これは

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{2} (\vec{D}\vec{E} + \vec{H}\vec{B})\, d^3x = \iiint (\vec{E}\,\vec{j})\, d^3x \tag{18.21$'$}$$

となる．この右辺は電場が，電流と相互作用して，単位時間に失うエネルギーであり，左辺はよく知っている電磁場のエネルギーの時間的な減少率である．つまりこれはエネルギー保存則を示す．(18.20) はまさにエネルギー保存則を微分形式で書いたものである．同じように $\nu = 1, 2, 3$ とすると，それは運動量保存則に相当する．

以上の議論はすべて特殊相対論の枠の中で成り立つ．もしも重力場が存在するときには，たとえある点で測地系を用いたとしても，(18.20) の左辺の第2項を全空間にわたって0とおくわけにはいかない．そこで上のように $x^0 = $ 一定 として積分するときは，(18.21) の右辺に

$$+\frac{1}{2} \iiint \mathfrak{M}^{\rho\sigma} \partial_0 g_{\rho\sigma} d^3x \tag{18.22}$$

がつけ加わる．この項は，エネルギーの1部分が重力場の方に逃げていくことを示している．ただ，静的重力場，つまり g が x^0 に無関係のときはこの余計な項が0になるから，電磁場だけで保存則が成立する．運動量の保存則についても，(18.22) と同じように

$$\frac{1}{2} \int \mathfrak{M}^{\rho\sigma} \partial_k g_{\rho\sigma} d^3x \quad k = 1, 2, 3$$

がつけ加わるから，重力場にとられる運動量を考えに入れなければ保存則は成り立たない．

最後に質量が m，電荷が e の質点が，あたえられた重力場 $g_{\mu\nu}$，および電磁場 $f_{\mu\nu}$ の中で運動しているとき，その方程式はどうなるを考えてみよう．これは特殊相対論の場合

の方程式から容易に導きだすことができる．すなわち，(15.2)′ においてパラメター s の代わりに，質点の proper-time τ を使うと

$$m\left\{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\cdot\frac{dx^\beta}{d\tau}\right\}=ef^\mu{}_\nu\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{18.23}$$

ここで

$$f^\mu{}_\nu(x)=g^{\mu\rho}(x)\cdot f_{\rho\nu}(x)$$

第 IV 章　重力場の方程式

§ 19.　重力場の方程式

これから Einstein の一般相対論の中で最も重要な問題，つまり重力場の方程式がどのようにして導かれるかについて述べよう．

Newton の万有引力論においては，重力のポテンシャルを Φ とすると，それは

$$\Delta\Phi = 4\pi G\cdot\rho(x) \tag{19.1}$$

という場の方程式にしたがう．第 I 章の序論で述べたように，$\rho(x)$ は物質の質量密度であり，G は Newton の万有引力定数である．

Einstein の理論では，重力のポテンシャルは 10 個の成分をもつ計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ である．それゆえ，これを決定するのには 10 個の場の方程式が必要である．また，一般相対性原理にしたがえば，この式は当然のことながらテンソル式でなければいけない．そこで，これから新しい重力場の方程式を導きだすのに役立ついろいろの条件を考えてみよう．

§ 16 で説明したように，弱い静的重力場のときには (16.5)′，すなわち

$$g_{00} \approx -1 - \frac{2}{c^2}\Phi(x) \tag{19.2}$$

という関係式が近似的に成り立つ．ところで，Φ は Newton の理論では 2 階の微分方程式を満足する．それゆえ，新しい場の方程式は $g_{\mu\nu}$ についての 2 階微分方程式であると考えてよかろう．

次に (19.1) の右辺は重力場の源を示す量である．ところで，この ρ が質量密度であることはすでに述べたが，厳密にいえば，この質量は重力場を生みだす質量である．質量にはこのほかに 2 種類ある．1 つは慣性質量であり，もう 1 つは重力質量である．この最後の重力質量と呼ばれるものは，厳密にいえば重力の影響をうけるときの質量で，はじめに述べた重力を作りだす質量とは一応区別すべきである．等価原理によって慣性質量と同一視されたものは“うけみの重力質量”であって，“重力の源となる質量”ではない．

ところで，2 種類の重力質量に差異があるものとする．いま，2 個の物体がそれぞれ相手の物体の作る重力の影響をうけて運動をしている場合を考える．もしこの両種の質量の比が物体によって違う場合には，作用反作用の等しいという，いわゆる Newton の第 3 法則は成り立たない．それゆえに，両種の質量の比は物体に無関係に一定でなければなら

ない．そうだとすれば，この比の値は万有引力定数を調節することによって1と考えることができる．つまり重力質量を2種類考えなくてもよいというわけである．このことと等価原理から，結局，上に述べた3種の質量はすべて同一と考えてよいことになる．

特殊相対論によると，慣性質量はこれに c^2 を掛ければエネルギーとなる．それゆえ，ρc^2 は重力を生みだす源の物質のエネルギー密度である．ところでエネルギー密度はスカラー量ではなくて，物質のもつ張力とか運動量密度と一緒になって2階のテンソルを作る．つまりエネルギー密度は，この**エネルギー運動量テンソル**の (0, 0) 成分にほかならない．

そこで重力場をうみ出す物質のエネルギー・運動量テンソルを $T^{\mu\nu}(x)$ とすると，(19.1) の自然な拡張として

$$F^{\mu\nu}(g,\ \partial g/\partial x,\ \partial^2 g/\partial x^2)=\alpha T^{\mu\nu}(x) \tag{19.3}$$

のような形のテンソル方程式が重力場の方程式であると想像できる．(19.3) の左辺は g の2階微分までを含むテンソルである．ところで，特殊相対論では，エネルギー・運動量の保存則は微分形式で書くと

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)=0$$

である．これを一般座標変換に対して不変の形に書きかえれば

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x)=0 \tag{19.4}$$

となる．この方程式は，物質自身の運動方程式から導かれるべきものである．この式はエネルギー・運動量の保存則を認める以上当然成立すべき式である．そこで (19.3) の左右両辺が矛盾しないためには，その左辺 $F^{\mu\nu}$ に対しても

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}=0 \tag{19.5}$$

が成立しなければならない．

以上のように，F について得られた条件をもう一度下にならべると，

(i) F は2階対称テンソルである．

(ii) F は $g_{\mu\nu}$, $\partial_\rho g_{\mu\nu}$, $\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ のみで構成されている．その上に $\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ については線形（つまり1次式）とする．

(iii) (19.5) を満足する．

このような $F^{\mu\nu}$ は §13 の最後に述べた定理から

$$F^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R-\lambda g^{\mu\nu}$$

しかない．ここで λ は未定の定数である．$g^{\mu\nu}$ の共変微分は常に0であるから，この右

辺の第3項のような不定性は残る．この最後の項は**宇宙項**と呼ばれ，λ は**宇宙定数**といわれる．経験と合致させるには，この未定の数 λ を

$$\lambda \approx 10^{-57} \sim 10^{-54}\,\mathrm{cm}^{-2}$$

程度の小さい数とすればよい．それゆえ，これからはしばらくこの第3項を無視することにする．

そうすると，重力場の方程式は*)

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \tag{19.6}$$

となる．(19.3) にでてきた比例定数 α はここで特に κ とおき，この κ を **Einstein の重力定数**と呼ぶ．また (19.6) を **Einstein の方程式**という．Hilbert も Einstein と独立にこの方程式を提唱したことをつけ加えておく．

(19.6) の縮約をとると，

$$-R = \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \kappa T$$

そこで (19.6) を書きかえて

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left\{ T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right\} \tag{19.6$'$}$$

とすることもできる．

重力場の源となる $\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \cdot T^{\mu\nu}$ として，たとえば電磁場を考えてみよう．電磁場のエネルギー運動量テンソルは (18.19) であたえられる．すなわち，(18.19) と記号がちがうが，

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} f^{\mu\rho} f^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma} + \frac{g^{\mu\nu}}{4\mu_0} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = T^{\nu\mu} \tag{18.19}$$

を Einstein の方程式 (19.6) の右辺に代入すれば，電磁場のもつエネルギーや運動量がそのまわりに重力場を生みだすことになる．電荷や電流がなければ (18.20)′ からもわかるように，この $T^{\mu\nu}$ は

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

を満足する．

重力場の源が完全流体のときには，$T^{\mu}{}_{\nu}$ は

$$T^{\mu}{}_{\nu}(x) = -\delta^{\mu}_{\nu} p(x) - \left(\rho(x) + \frac{p(x)}{c^2} \right) u^{\mu}(x) \cdot u_{\nu}(x) \tag{19.7}$$

*) 本書の $T^{\mu\nu}$ の定義は (18.17) で説明したように，$\mathfrak{T}^0{}_0$ がエネルギー密度となるように決めてある．

であたえられる．ここで $\rho(x)$ は時空点 x における局所慣性系からみたときの流体の静止密度であり，p も同様に局所慣性系からみた圧力，また $u^\mu(x)$ は点 x にある流体の小部分の 4 元速度である．

もしも流体の代わりに，多数の質点の集団を考えるときは，ρ をこの質点系の質量密度（ただし局所慣性系からみたものとする）とする．また各質点の 4 元速度は，隣接した質点については大体等しいものとすると，上の u^μ は点 x の近くにある質点の集まりの代表的速度と思えばよい．そうすると，$T^\mu{}_\nu$ は

$$T^\mu{}_\nu = -\rho(x)\cdot u^\mu(x)u_\nu(x) \tag{19.8}$$

となる．

（19.8）であたえられる $T^{\mu\nu}$ が保存則（19.4）を満足することはつぎのように証明される．

いま，ある点 x にある質点の小さな集合を考え，その集合の運動を追跡してみよう．この集合の proper time を τ とすると

$$u^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

である．また，この質点系には重力以外の力は働いていないとすると，運動方程式は

$$0 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau}(\nabla_\nu u^\mu) = u^\nu\nabla_\nu u^\mu \tag{19.9}$$

となる．そこで，（19.8）に ∇_μ を作用させると

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -\nabla_\mu(\rho u^\mu)\cdot u^\nu - \rho u^\mu\cdot\nabla_\mu u^\nu$$

この最後の項は（19.9）のために消えるから

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -u^\nu\cdot\nabla_\mu(\rho u^\mu).$$

ところが，質点系は物質の保存則，つまり連続方程式にしたがうから

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0 \tag{19.10}$$

が成立する．そこで結局

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{19.11}$$

となる．

（19.8）を Einstein の式に代入すれば

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa\rho\cdot u^\mu u^\nu \tag{19.12}$$

となる．

§ 20. Newton の重力場の方程式

Einstein の方程式は，近似的に Newton の重力場の方程式と一致することを示そう．まず，ある適当な座標系からみて重力場の源となる物質が静止しているものと仮定する．また，重力場は非常に弱い場で

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(x)$$

$$|h_{\mu\nu}(x)|\ll 1 \tag{20.1}$$

が成立するものとする．そのうえに静的重力場，つまり $h_{\mu\nu}$ は x^0 に無関係とする．

このような場合には (19.12) の第 (0, 0) 成分のみを考えればよい．あるいはこれと同等な (19.6)′ の (0, 0) 成分を考えよう．ここで $u^0\approx c,\ u^1,\ u^2,\ u^3\approx 0$ および(20.1)を考えると，$h_{\mu\nu}$ について 2 次以上を無視して (19.6)′ は

$$-\sum_{k=1}^{3}\partial_k\Gamma^k_{00}=-\frac{\kappa}{2}\rho(x)c^2$$

となる．ところで，いま考えているような条件のもとでは

$$\Gamma^k_{00}=-\frac{1}{2}\partial h_{00}/\partial x^k \qquad (k=1,\ 2,\ 3)$$

であるから，結局

$$\Delta h_{00}=-\kappa\rho(x)c^2$$

となる．これに (16.5) を代入して

$$\Delta\Phi=\frac{c^4\kappa}{2}\rho(x) \tag{20.2}$$

そこで Einstein の定数 κ が Newton の万有引力定数と

$$\kappa=\frac{8\pi G}{c^4}=2.07\times10^{-48}\,\mathrm{sec^2\cdot cm^{-1}\cdot g^{-1}} \tag{20.3}$$

の関係にあれば，(20.2) は Newton の方程式と完全に一致する．

このように，Einstein の定数 κ は実験から決められる．

§ 21. Schwarzschild の外部解

Einstein の重力場の方程式は，10 個の未知関数 $g_{\mu\nu}(x)$ についての連立 2 階非線型偏微分方程式であるから，Maxwell の方程式とちがって厳密解を求めることはむずかしい．Einstein 自身*) は，自分の提唱した理論を検討するために逐次近似法でまず場の方程式を解いて，その結果からいろいろな興味ある結論を引きだした．

---

*) A. Einstein : S. B. preuss. Akad. Wiss. (1915) p. 145

ところで，Einstein の重力場の方程式をなにも近似をしないで厳密に解いたのは Schwarzschild*) がはじめてである．

彼は次のような仮定をした．まず，座標原点には重力場の源となる質量 m の物体（質点とする）が静止しているとする．重力場は球対称とする，さらに，時間的に変化しない静的重力場を考える．つまり $g_{\mu\nu}$ は原点からの動径座標 r だけの関数と仮定する．

そこで，隣接した任意の2点の間の不変距離 ds^2 を

$$ds^2 = g'_{00}(r')(dx^0)^2 + g'_{11}(r')(dr')^2 + g'_{22}(r')(r')^2\cdot\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \quad (21.1)$$

とおく．これは静的で，球対称で，その上に時間の進行する向きを反転しても不変な ds^2 の最も一般的な形と考えられる．しかし，適当な座標変換をすれば（21.1）はもう少し簡単な形に書き直すことができる．

いま

$$r' \to r = r'\sqrt{g'_{22}(r')} = x^1, \quad \theta = x^2, \quad \varphi = x^3$$

のように座標変数を変換する．これにつれて

$$\left.\begin{aligned} g_{11}(r) &= \left(\frac{dr'}{dr}\right)^2 g'_{11}(r') \stackrel{d}{\equiv} e^{\lambda(r)} \\ g'_{00}(r') &= g_{00}(r) \stackrel{d}{\equiv} -e^{\nu(r)} \\ g_{22} &= r^2, \ g_{33} = r^2\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (21.2)$$

$$ds^2 = -e^{\nu}(dx^0)^2 + e^{\lambda(r)}\cdot(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \quad (21.1)'$$

となる．$\nu(r)$，$\lambda(r)$ は未知関数で，これらを場の方程式が満足されるようにこれから決める．

原点の物体のいる場所をのぞいて，その外側では Einstein の式は

$$G_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (21.3)$$

ところで（21.2）から $g^{\mu\nu}$ はすぐに求められるし，また，Γ も容易に計算できる．その結果は

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda', \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu', \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\nu'\cdot e^{\nu-\lambda}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\cdot e^{-\lambda}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cdot\cos\theta, \quad \Gamma^3_{23} = \cot\theta, \quad \text{その他の } \Gamma = 0$$

ただし　$\lambda' = \dfrac{d\lambda}{dr}$，$\nu' = \dfrac{d\nu}{dr}$　のことである．

---

*) K. Schwarzschild : S. B. preuss. Akad. Wiss. (1916) p. 189.

これらを (21.3) に代入すると

$$G^0{}_0=\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\lambda'\right)=0 \tag{21.4}$$

$$G^1{}_1=\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\nu'+\frac{1}{r^2}\right)=0 \tag{21.5}$$

$$G^2{}_2=G^3{}_3=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{2}\nu'\cdot\lambda'-\nu''-\frac{1}{2}(\nu')^2-\frac{1}{r}\nu'+\frac{1}{r}\lambda'\right\}=0 \tag{21.6}$$

その他のものは $G^\mu{}_\nu$ 自身がもともと 0 となるからここには書かない. つまり上の 3 個の式が Einstein の場の方程式の全部である.

(21.4) から (21.5) をひくと,

$$\frac{\nu'+\lambda'}{r}=0$$

となる. これはすぐに積分ができて

$$\nu+\lambda=b=(r \text{ に無関係}) \tag{21.7}$$

(21.4) に r^2 をかけると

$$1-\frac{d}{dr}(re^{-\lambda})=0$$

となるから, これもまたすぐに積分できて,

$$e^{-\lambda}=1-\frac{a}{r}, \qquad a=\text{積分定数} \tag{21.8}$$

となる. これと (21.7) を一緒にすると

$$e^{\nu}=e^{b}\cdot e^{-\lambda}=e^{b}\cdot\left(1-\frac{a}{r}\right) \tag{21.9}$$

となる.

(21.7) を (21.6) に代入すると ν は消去されて

$$\lambda''+\frac{2}{r}\lambda'-(\lambda')^2=0 \tag{21.6)$'$$

しかしこれは (21.4) から導きだすことができる. (21.4) に r^2 を掛けて両辺を r で 1 度微分すると (21.6)′ となる. それゆえ, (21.6) は (21.4), (21.5) と関数的に独立ではない. つまり, (21.4), (21.5) だけを考えれば十分である. そこで, 結局 (21.1)′ は

$$ds^2=-\left(1-\frac{a}{r}\right)(e^{\frac{b}{2}}\cdot dx^0)^2+\frac{1}{1-\frac{a}{r}}(dr)^2+r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\}$$

となる. ここで

$$e^{\frac{b}{2}}x^0 = x^{0\prime} = ct$$

とおけば

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^{0\prime})^2 + \frac{(dr)^2}{1-\dfrac{a}{r}} + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \tag{21.10}$$

(21.8) にでてくる積分定数 a を決めるのには，“弱い重力場”の近似が成立する場合を考えればよい．つまり重力場の源から十分に離れたところ $r\to\infty$ では

$$g_{00}(r) = -\left(1-\frac{a}{r}\right) \approx -1-\frac{2\Phi}{c^2} \tag{21.11}$$

となる．Φ は Newton のポテンシャルで

$$\Phi = -\frac{Gm}{r} \qquad (m：\text{重力場の源となる物体の質量})$$

であるから，(21.11) のような関係が成立するためには

$$a = \frac{2Gm}{c^2} \tag{21.12}$$

となる．

(21.12) からわかるように，a は質量 m に比例する長さで，**重力的半径**と呼ばれる．たとえば，重力の源として太陽をとると，$m = 2\times10^{33}\,\text{g}$ であるから $a = 3\times10^5\,\text{cm} = 3\,\text{km}$ となる．

(21.10) であたえられる $g_{\mu\nu}$ は，重力場の源となる物体の外側で成立する式であるから，**Schwarzschild の外部解**と呼ばれる．

この解の特徴は，r が大きな値からだんだん a に近づくと

$$\lim_{r\to a+0} g_{00}(r) = 0, \qquad \lim_{r\to a+0} g_{11}(r) = +\infty$$

となることである．また $r=a$ のときには，$\theta=\varphi=$一定に決めたときに，$dx^{0\prime}>0$ に対して

$$(cd\tau)^2 = -ds^2 = \left(1-\frac{a}{r}\right)_{r=a}(dx^{0\prime})^2 = 0$$

となる．つまり，いくら座標時間 t が経過しても，$r=a$ という球面上の各点に固定された時計の示す固有時間 (proper time) τ は止まったままである．

また，$r=a$ の近所でごく接近した2点を考えよう．これらの座標を (r, θ, φ) および $(r+dr, \theta, \varphi)$ とすると，この2点間の距離は

$$ds = \left(\frac{dr}{\sqrt{1-\dfrac{a}{r}}}\right)_{r=a} = \infty$$

である.

このような奇妙なことの起こる $r=a$ という球面を **Schwarzschild の障壁**と呼ぶ. この壁は 4 次元的に考えるならば，時間軸の方に無限にのびた半径 a の円筒（その表面は 3 次元曲面）である.

ところで前に述べたように，太陽を例にとると $a=3\,\text{km}$ である. 太陽の実際の半径 r_0 は $r_0=7\times10^5\,\text{km}$ で，a は r_0 に比べれば問題にならないほど小さい. それゆえ，問題の障壁の近くは太陽の中心近くにあり，そこでは，物質のないときの場の方程式 (21.3) は使えない. したがって，この Schwarzchild の壁の問題は単なる数学的問題で，実際には存在しない. しかし，もしも物体の密度が非常に大きくて，その実際の半径が重力的半径 a よりも小さいときには，この障壁の問題があらためて重要になる. たとえば，星を作っている物質が自分の作る重力によって互いに引っ張りあって凝縮するとすれば，非常に密度の大きい星となるであろう. 凝縮が進行するにつれてその星の半径はしだいに小さくなり，ついにはその重力的半径 a に近づく. このような現象は **Gravitational collapse**（**重力的凝縮**）といわれ，最近の一般相対論や天文学の方面での興味ある問題の 1 つになっている.

Schwarzschild の解 (21.10) は，座標変換によりいろいろとちがった形に書き直される. なかでもよく使われるものは，**isotropic coordinate** と呼ばれるもので，この座標変数を r'', θ'', ϕ'', $x^{0''}$ とすると，もとの変数との関係は

$$r = r''\left(1+\frac{a}{4r''}\right)^2 \tag{21.13}$$

θ'', φ'', x_0'' はもとのままである. 上の関係式は書き直すと

$$r'' = \frac{1}{2}\left\{(r^2-ar)^{1/2}+r-\frac{a}{2}\right\} \tag{21.13$'$}$$

ともなる. この新しい座標系では Schwarzschild の ds^2 は

$$ds^2 = \left(1+\frac{a}{4r''}\right)^4\{(dr'')^2+(r'')^2\cdot(d\theta'')^2+(r'')^2\sin^2\theta''\cdot(d\phi'')^2\}$$
$$-\frac{\left(1-\dfrac{a}{4r''}\right)^2}{\left(1+\dfrac{a}{4r''}\right)^2}(dx^{0''})^2 \tag{21.14}$$

となる. この座標系が "isotropic" と呼ばれるのは，(21.14) の空間部分をみればわかる

ように，はじめの $(1+a/4r'')^4$ をのぞけばユークリッド空間のときの距離と同じ形をしているためである．

(21.14) では，少なくとも空間部分については Schwarzschild の特異点は消去されている．つまり，r'' のどんな値に対しても空間部分の $g_{\mu\nu}$ には (21.10) のような奇妙な欠点はない．しかし g_{00}'' は $r''=a/4$ で 0 となるから，(21.14) にも Schwarzschild の壁は残っている．$r''=a/4$ はもとの変数 r では $r=a$ に相当するから，まさに Schwarzschild の障壁そのものである．

Schwarzschild の壁を消し去るためにいろいろの座標変換がくふうされた．しかし，見かけの形はいろいろ変わっても，この壁の上の $g_{\mu\nu}$ の特異性を消し去ることはできない．一般に $T^{\mu}{}_{\nu}=0$ のときの Einstein 方程式の解で

$$\lim_{r\to\infty} g_{00} = -1+\frac{\text{const.}}{r}$$

のような漸近形をもち，しかもどこにも特異点をもたないような解は存在しないことが証明された*⁾．

§ 22. 点電荷の作る重力場

電気をもった小さな物体が座標原点に静止しているとき，そのまわりの重力場がどんなものかをしらべてみよう．荷電体は原点の所に静止しているが，その電場は空間全体にひろがっている．したがって，原点以外の所でも電場のエネルギー密度は 0 ではないから，Einstein の方程式の右辺の $T_{\mu\nu}$ を 0 とおくわけにはいかない．

このような場合でも次のような仮定をすれば厳密解が求められる．まず，荷電体は半径 r_0 の小さな球殻として，その表面に電荷が一様に分布しているものとする．この荷電体により作られる静的な球対称の電場を考える．いま，座標変数を § 21 と同様に $x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ とするとき，球対称の仮定から

$$f_{10}=(r\text{ だけの関数}),\quad \text{その他の } f_{\mu\nu}=0 \tag{22.1}$$

とする．

ds^2 に対しては前と同様に

$$ds^2=-e^{\nu}(dx^0)^2+e^{\lambda}(dr)^2+r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta\cdot(d\varphi)^2\} \tag{22.2}$$

とおく．ν，および λ はともに r だけの関数と仮定する．

さて，Maxwell の方程式は (18.13) から

---

*⁾ A. Einstein and W. Pauli : Ann. of Math. **44** (1943) p. 131.

$$\partial_\nu\{\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}f_{\rho\sigma}\}=\mu_0\sqrt{-g}\cdot j^\mu \tag{22.3}$$

ここで，電荷は球殻の表面にだけ静止しているから，4元電流密度の0でない成分は $\sqrt{-g}\cdot j^0$ だけである．これを全空間で積分すれば

$$\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\cdot j^0(r)dr\cdot d\theta\cdot d\varphi=\text{全電荷 }e$$

ところで，(22.2) から

$$\sqrt{-g}=e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\cdot r^2\sin\theta$$

であるから，上の積分は下のようになる．

$$\frac{4\pi}{c}\cdot\int_0^\infty j^0(r)\cdot e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\cdot r^2\cdot dr=e$$

電荷は半径 r_0 の球面上だけにあるから，上の式から

$$j^0(r)=\frac{c}{4\pi}\cdot e\cdot\frac{\delta(r-r^0)}{r^2}\cdot e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} \tag{22.4}$$

$$\sqrt{-g}\cdot j^0(r)=\frac{c}{4\pi}\cdot e\sin\theta\cdot\delta(r-r_0) \tag{22.4$'$}$$

そこで，(22.4)′ を (22.3) に代入すると，$\mu=0$ に対して

$$\sum_{k=1}^{3}\partial_k\{\sqrt{-g}\,g^{00}g^{kk}f_{0k}\}=\frac{c\mu_0}{4\pi}e\cdot\sin\theta\cdot\delta(r-r_0)$$

または，(22.1) の仮定から左辺は簡単になって

$$\frac{d}{dr}\{-r^2\cdot e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}\cdot f_{01}\}=\frac{c\mu_0}{4\pi}e\cdot\delta(r-r_0)$$

球殻の中では電場が0であるから，上の式を0から任意の $r(>r_0)$ まで積分すれば

$$f_{01}(r)=\frac{-c\mu_0}{4\pi}\cdot e\cdot\frac{e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2}=-\frac{e}{4\pi c\cdot\varepsilon_0}e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}/r^2$$

または

$$f^{01}(r)=\frac{c\mu_0}{4\pi}e\cdot\frac{e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2}=\frac{e}{4\pi c\cdot\varepsilon_0}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}/r^2 \tag{22.5}$$

そこで (22.1)，(22.5) から電磁場のエネルギー・運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ を計算できる．すなわち，(18.19) を使うと

$$\left.\begin{aligned}T^0{}_0=T^1{}_1&=-\frac{1}{2\mu_0}f^{01}f_{01}=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\\ T^2{}_2=T^3{}_3&=-\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\end{aligned}\right\} \tag{22.6}$$

となる．これを Einstein の方程式に代入すると，(21.4)～(21.6) の代わりに

$$G^0{}_0 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\lambda'\right) = \alpha^2/r^4 \qquad (22.7)$$

$$G^1{}_1 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r^2}\right) = \alpha^2/r^4 \qquad (22.8)$$

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{2}\nu'\lambda' - \nu'' - \frac{1}{2}(\nu')^2 - \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r}\lambda'\right\} = -\alpha^2/r^4 \qquad (22.9)$$

となる．ここに

$$\alpha^2 = \frac{\kappa e^2}{32\pi^2\varepsilon_0} = \frac{Ge^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4}$$

(22.7) と (22.8) を組み合わせると，§ 21 のときと全く同じようにして

$$\nu + \lambda = 0$$

となる．また，(22.7) に r^2 を掛けて積分すれば

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \qquad (22.10)$$

となる．積分定数 a は § 21 と同じ理由から

$$a = \frac{2Gm}{c^2} \qquad m：原点にある荷電体の質量$$

となる．(22.9) に $\nu = -\lambda$ の関係を代入すると，その結果は (22.7) に r^2 を掛けて微分したものと一致する．それゆえ，§ 21 と同じように (22.9) は問題にしなくてよい．

そこで，球殻の外側 ($r > r_0$) においては，ds^2 は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta\cdot(d\varphi)^2\} \qquad (22.11)$$

によってあたえられる．

球殻の内側では電荷も電場も存在しない．もし $g_{\mu\nu}$ が $r < r_0$ で特異点をもってはならないと要求すれば，Einstein の方程式の解は Minkowski 型の $g_{\mu\nu}$ となる．すなわち

$$g_{00} = -1, \qquad g_{11} = 1, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = r^2\sin^2\theta \qquad (22.12)$$

(22.11) と (22.12) とは $r = r_0$ で一致しなければならない．そこで

$$1 - \frac{a}{r_0} + \left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2 = 1 \qquad (22.13)$$

という条件が必要になる．これは書き直すと

$$a = \frac{\alpha^2}{r_0} \qquad \text{または} \qquad m = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0 c^2} \qquad (22.13)'$$

となる.

一方，電場の全エネルギーは（22.6）から

$$E = \iiint_{r=r_0}^{\infty} T^0{}_0 \sqrt{-g} \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= \frac{4\pi e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^4} \cdot r^2 dr$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

そこで，(22.13)′ は

$$mc^2 = E \tag{22.14}$$

となる．つまり荷電体の質量 m は電磁的質量に等しいことを示している．

（22.11）は **Reissner-Weyl の解***) と呼ばれる．この解を電子に適用してみよう．すなわち，電子は半径 r_0 の球殻で，その表面に電荷が一様に分布しているものとする．そのときの a および α は

$$a = 1.34 \times 10^{-66}\,\mathrm{cm}, \qquad \alpha = 1.37 \times 10^{-34}\,\mathrm{cm}$$

となる．また，(22.13)′ から

$$r_0 = \left(\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\right) / mc^2 = \text{古典電子半径} = 1.4 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}$$

このような電子模型は量子論を考慮してはないが，大変に興味深いものである．

§ 23. Schwarzschild の内部解

§.21 で求めた厳密解は重力場の源になる物体の外側においてだけ成立するもので， 外部解といわれるのもそのためである．これに対して源の物体の内部では $T^\mu{}_\nu \neq 0$ であるから，厳密解を求めることは一般には大変むずかしい．ここでは物体の内部は 1 種の完全流体と考え，その $T^\mu{}_\nu$ は（19.7）から

$$T^\mu{}_\nu = -\delta^\mu_\nu p(x) - (\rho + p/c^2) \cdot u^\mu u_\nu \tag{23.1}$$

であたえられるものとする．そして § 21 の場合と同様に ds^2 は $ct = x^0$ として，

$$ds^2 = -e^\nu (dx^0)^2 + e^\lambda (dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2\}$$

とする．ここで ν, λ, p, ρ はすべて r だけの関数と仮定する．さらに，流体は静止していると仮定する．流体内の小さな部分に目をつけてその proper time を τ とすると， 静止

---

*) H. Reissner : Ann. d. Phys. **50** (1916). p. 106
H. Weyl, ibid. **54**, (1917) p. 117.

しているために

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}\cdot(dx^0)^2} = e^{\frac{\nu}{2}}\cdot dt$$

また，この小部分の4元速度 $u^\mu(x)$ は

$$\left.\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} = e^{-\frac{\nu}{2}}\frac{dx^\mu}{dt} = \begin{cases} e^{-\frac{\nu}{2}}\cdot c & \mu=0 \\ 0 & \mu=1,\ 2,\ 3 \end{cases} \\ u_\mu &= g_{\mu\nu}u^\nu = \begin{cases} -e^{\frac{\nu}{2}}c & \mu=0 \\ 0 & \mu=1,\ 2,\ 3 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{23.2}$$

したがって，$T^\mu{}_\nu$ は

$$T^0{}_0 = c^2\rho, \qquad T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 = -p, \qquad \text{その他の } T^\mu{}_\nu = 0 \tag{23.3}$$

となる．

このような仮定をすれば厳密解を求めることができる．

まず，Einstein の方程式は (21.4)〜(21.6) を使って

$$G^0{}_0 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\lambda'\right) = \kappa c^2\cdot\rho \tag{23.4}$$

$$G^1{}_1 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r^2}\right) = -\kappa p \tag{23.5}$$

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{2}\nu'\cdot\lambda' - \nu'' - \frac{1}{2}(\nu')^2 - \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r}\lambda'\right\} = -\kappa p \tag{23.6}$$

となる．一方，$T^\mu{}_\nu$ については保存則が成立するから

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu{}_\lambda = 0$$

この式で $\nu=1$ 以外の式は $0=0$ となってしまう．$\nu=1$ に対しては § 21 の Γ の表式を使うと

$$\frac{d}{dr}T^1{}_1 + \Gamma^\mu_{\mu 1}\cdot T^1{}_1 - \sum_{\mu=0}^{3}(\Gamma^\mu_{\mu 1}\cdot T^\mu{}_\mu) = -\left\{\frac{dp}{dr} + \frac{\nu'}{2}(p + \rho\cdot c^2)\right\} = 0 \tag{23.7}$$

となる．

ところで，$G^\mu{}_\nu$ については有名な恒等式

$$\nabla_\mu G^\mu{}_1 \equiv \frac{dG^1{}_1}{dr} + \frac{1}{2}\nu'(G^1{}_1 - G^0{}_0) + \frac{2}{r}(G^1{}_1 - G^2{}_2) \equiv 0$$

がある．一方，(23.4)〜(23.6) の右辺の量は独立でなくて，(23.7) の方程式で結ばれている．このことから4個の方程式 (23.4)〜(23.7) は互いに独立でなく，たとえば(23.6)

をはぶいてよい．つまり，(23.4) (23.5) (23.7) の3個の方程式が成立すれば，その結果として (23.6) も成立することがわかる．一方，未知数は ν, λ, p, ρ の4個であるから，方程式の数が1個たりない．これをおぎなうのには p と ρ との関係をあたえる流体の状態方程式を使えばよい．

しかしながら，この4個の連立方程式を厳密に解くことは一般にはむずかしい．そこで本書では非圧縮性流体の場合についてだけ述べることにする．

流体が非圧縮性とすると ρ は r に無関係で定数となる．この場合には (23.4) の右辺は定数であるから，r^2 を掛けて積分すると

$$g^{11}=e^{-\lambda}=1-\frac{a}{r}-\frac{\kappa c^2\rho}{3}r^2 \tag{23.8}$$

となる．ところで，流体の内部で $g^{\mu\nu}$ は特異点をもってはならないから，積分定数 a は，0とおかねばならない．そこで，結局

$$e^{\lambda}=g_{11}(r)=\frac{1}{g^{11}}=\frac{1}{1-\dfrac{r^2}{R^2}} \tag{23.9}$$

$$R=\sqrt{\frac{3}{\kappa c^2\rho}}$$

となる．

また，$\rho=$一定から (23.7) もすぐに積分ができる．その結果は

$$\{p(r)+\rho c^2\}e^{\frac{\nu}{2}}=\text{一定} \tag{23.10}$$

そこで (23.4) から (23.5) を引いて $e^{\frac{\nu}{2}}$ を掛けると

$$e^{-\lambda+\frac{\nu}{2}}\cdot\frac{\nu'+\lambda'}{r}=\text{一定}$$

これに (23.9) を代入すると

$$\frac{1}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d}{dr}(e^{\frac{\nu}{2}})+\frac{1}{R^2}e^{\frac{\nu}{2}}=\text{一定}$$

となる．いま

$$e^{\frac{\nu}{2}}=\sqrt{1-(r/R)^2}\cdot f(r)$$

とおけば，上の式は未知量 f に対する方程式

$$\frac{df}{dr}\cdot\frac{1}{r}\{1-(r/R^2)\}^{3/2}=\text{一定}=b$$

となる．これから

$$f=R^2b\{1-(r/R)^2\}^{-1/2}+B$$

または

$$-g_{00}=e^{\nu}=\{A+B\sqrt{1-(r/R)^2}\}^2 \tag{23.11}$$

となる．ここに A, B は積分定数で，A は上の R^2b のことである．そこで内部解は結局*)

$$ds^2=-\{A+B\sqrt{1-(r/R)^2}\}^2(dx^0)^2+\frac{dr^2}{1-(r/R)^2}+r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta\cdot(d\varphi)^2\} \tag{23.12}$$

となる．

この未定の定数 A, B を決めるために，流体は半径 r_0 の球のなかに閉じこめられているとする．$r<r_0$ では ds^2 は (23.12) の形であり，$r>r_0$ では (21.10) である．そこで，この両者は $r=r_0$ で一致しなければならない．また，球の表面では当然のことながら $p=0$ であるべきである．まず，$r=r_0$ で内部解と外部解とが一致するためには

$$1-\frac{a}{r_0}=1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2=\left\{A+B\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2}\right\}^2 \tag{23.13}$$

また，(23.11)，(23.9) を Einstein の方程式 (23.5) に代入すれば，$p(r)$ は

$$\kappa p=-\frac{A+3B\sqrt{1-(r/R)^2}}{R^2\{A+B\sqrt{1-(r/R)^2}\}} \tag{23.14}$$

となる．そこで，球面上で $p=0$ となるためには

$$A+3B\sqrt{1-(r_0/R)^2}=0 \tag{23.15}$$

となる．ここで

$$R=\sqrt{3/\kappa\rho c^2}=\sqrt{3c^2/8\pi G\rho}$$

$$a=\frac{2Gm}{c^2}$$

である．(23.13) および (23.15) の3個の関係式を解いて，A, B および m を半径 r_0 と密度 ρ で書き表わすと，

$$A=\frac{3}{2}\sqrt{1-(r_0/R)^2},\qquad B=-1/2,\qquad m=\frac{4\pi}{3}r_0{}^3\cdot\rho \tag{23.16}$$

ところで，a，r_0 およびRという3個の長さには次のような関係がある．まず，球の外側では特異点が存在しないためには $a<r_0$，すなわち Schwarzschild の壁は球の外側に無いことが必要である．また，内部解が特異点をもたないためには $R>r_0$ であればよい．そこで

*) K. Schwarzschild : S. B. preuss. Akad. Wiss., (1916) p. 424

$$\frac{3c^2}{8\pi G\rho} > r_0{}^2 > \left(\frac{8\pi G}{3c^2} r_0{}^3 \rho\right)^2 \tag{23.17}$$

この不等式が成立するためには

$$\frac{3c^2}{8\pi G r_0{}^2} > \rho$$

ならばよい．これを（23.16）に代入すると

$$m < \frac{r_0 c^2}{2G}$$

となる．

さて，上に得た結論を電子に応用してみよう．すなわち，電子は非圧縮性の完全流体からできている半径 r_0 の球とする．（23.16）および a の定義を使って（23.17）の中の ρ を a で書きかえると

$$r_0\sqrt{\frac{r_0}{a}} > r_0 > a \tag{23.17$'$}$$

となる．§ 22 と同様に r_0 としては古典電子半径を使うと

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}/mc^2 = 1.4\times 10^{-13}\,\mathrm{cm}$$

また，a は § 22 にあるように

$$a = 1.34\times 10^{-55}\,\mathrm{cm}$$

であるから，（23.17)′ の関係は電子の場合には成立している．

最後に（23.16）の m について 1 つ注意を書く．まず球の体積を計算しよう．（23.12）から x^0 = 一定としたときの 3 次元体積素片は

$$\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33}}\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi = \frac{r^2}{\sqrt{1-(r/R)^2}}\sin\theta\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi$$

である．そこで球の体積は

$$V = \int_0^{r_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{r^2}{\sqrt{1-(r/R)^2}}\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi\, dr = 4\pi\int_0^{r_0}\frac{r^2}{\sqrt{1-(r/R)^2}}dr$$

$$= \frac{4\pi}{3}r_0{}^3\left\{1+\frac{3}{10}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2+\cdots\right\} > \frac{4\pi}{3}r_0{}^3$$

となる．それゆえ，（23.16）と比べて

$$m < \rho\cdot V$$

この一見矛盾した結果についてはあとで再びくわしく議論する．ここではただ m の意味についてちょっと記す．この m は Schwarzschild の外部解に出てくる m で，それは重力の源から十分に離れた場所から見たときの質量である．それゆえ，源の物体自身の

質量のほかに，それがまわりに作っている重力場のエネルギーをも考えにいれなければならない．すなわち，この後者を c^2 で割ったものも遠方の観測者からみれば m の中に含まれて見えるからである．

重力場のエネルギーについては次の章で説明する．このほかに重力場が弱いときの近似解，特にそれに関連して重力波の問題があるが，これについては第Ⅵ章で詳述する．

第 V 章　不変変分論

§ 24. Hamilton の原理

質点力学の場合と同じように，適当な Lagrange 関数をみつけることにより，力学の Hamilton の原理にしたがって Einstein の重力場の方程式 (19.6) を変分法によって導き出すことができる.

まず，座標変換に対して不変な積分

$$J = \int \sqrt{-g}\, R\, d^4x \tag{24.1}$$

を考えてみよう. (24.1) の積分域は，任意ではあるが，ある決まった 4 次元領域 Ω とする. もしこの Ω の中の各時空点における $g_{\mu\nu}$ の値がすべてわかっていれば，J の値は計算できるはずである. つまり，J は Ω 内での $g_{\mu\nu}(x)$ のふるまいによって決まるから，$g_{\mu\nu}$ の汎関数とみなすことができる.

そこで Ω 内の $g_{\mu\nu}$ を $\delta g_{\mu\nu}$ だけ変化させたとき，これに対応して J がどのように変わるかをしらべてみよう. ここで，$\delta g_{\mu\nu}$ は Ω の表面上では 0 と仮定する.

さて，J の変分は

$$\delta J = \int \{\delta(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu})\cdot R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\cdot \delta R_{\mu\nu}\} d^4x \tag{24.2}$$

ここで，$R_{\mu\nu}$ の定義から

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) - \delta(\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) + \delta(\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}) - \delta(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\lambda})$$

いま，変分と微分の順序を交換してもかまわないこと，すなわち

$$\delta(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) = \partial_\mu(\delta \Gamma^\lambda_{\nu\lambda})$$

を利用すると，上の $\delta R_{\mu\nu}$ の右辺は，少しならべかえることにより

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \{\partial_\mu(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\} - \{\partial_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \\ &\qquad - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\} \\ &= \nabla_\mu(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\end{aligned} \tag{24.3}$$

となる. ここで，変分させたあとの Γ を Γ^* と書くことにすると，

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}{}^{*} \stackrel{d}{\equiv} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

もまたアフィン係数であるから，座標変換に対してこの Γ^{*} はもとの $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ と同様の変換をする．そこで

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}{}^{*}(x) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$$

の変換は

$$\delta\Gamma^{\lambda'}_{\mu\nu}(x') = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}{}^{*\prime}(x') - \Gamma^{\lambda'}_{\mu\nu}(x')$$

$$= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}} (\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}{}^{*}(x) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)) = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}} \cdot \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$$

となる．すなわち，Γ 自身の変換のときに現われた

$$\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}$$

は相殺されて，$\delta\Gamma$ の変換式には出てこない．その結果 $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は3階のテンソルである．それゆえ，(24.3) の右辺は3階テンソル $\delta\Gamma$ の共変微分になっている．

さて，(24.3) を (24.2) の第2項に代入して部分積分を行なうと，

$$(\text{第2項}) = -\int \{\partial_{\mu}(\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} \cdot g^{\rho\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} d^4x$$

$$+ \int \sqrt{-g} \left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}(\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu}) - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} + g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} + g^{\rho\mu}\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}\right\}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} d^4x$$

$$+ \int \{\partial_{\mu}(\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu} \cdot \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda}) - \partial_{\lambda}(\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})\} d^4x$$

上の最後の積分は Ω の表面の上の積分になるから，そこでは変分は0となるのでこれは考える必要がない．第1積分は

$$-\int \sqrt{-g} \cdot \nabla_{\mu} g^{\mu\nu} \cdot \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} d^4x = 0$$

となる．同様に上の式の第2積分も

$$\int \sqrt{-g}\, \nabla_{\lambda} g^{\mu\nu} \cdot \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} d^4x = 0$$

となる．したがって (24.2) は第1項だけになる．ところで

$$\delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} \cdot g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \cdot g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \cdot \delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \delta g^{\rho\sigma}$$

であるから，結局

$$\delta J=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{24.4}$$

となる.

ところで，δJ はまた次のように書きかえることができる．すなわち

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\cdot R&=\partial_\mu\{\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}\}-\partial_\mu(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu})\cdot\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}\\&-\partial_\lambda\{\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\}+\partial_\lambda(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu})\cdot\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\\&+\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\{\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}\cdot\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\}\end{aligned} \tag{24.5}$$

また Γ の定義によれば

$$\partial_\mu\sqrt{-g}=\sqrt{-g}\,\Gamma^\lambda_{\mu\lambda},\qquad \partial_\lambda g^{\mu\nu}=-\Gamma^\mu_{\lambda\rho}g^{\rho\nu}-\Gamma^\nu_{\lambda\rho}g^{\mu\rho}$$

という関係が成り立つ．これを使うと（24.5）式の第2項と第4項は一緒にして

$$(\text{第2項と第4項})=2\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho}-\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\}$$

これは（24.5）の最後の項を（−2）倍したものにほかならない．そこで

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-g}R&=\sqrt{-g}G+\partial_\mu\mathfrak{D}^\mu\\G&\overset{d}{\equiv}g^{\mu\nu}\{\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}-\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\}\\\mathfrak{D}^\mu&\overset{d}{\equiv}\sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}-g^{\rho\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\}\end{aligned}\right\} \tag{24.6}$$

となる.

（24.6）を使うと

$$\delta J=\delta\int\sqrt{-g}\,G\cdot d^4x+\delta\int\partial_\mu\mathfrak{D}^\mu\cdot d^4x$$

この第2積分も Ω の表面上の積分に書き直せるから，その変分は0となる．したがって，この結果と（24.4）を組み合わせると

$$\begin{aligned}\delta J^*&\overset{d}{\equiv}\delta\int\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\{\Gamma^\rho_{\mu\nu}\cdot\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}-\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\}d^4x\\&=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\cdot d^4x\end{aligned} \tag{24.7}$$

となる.

ここで話を変えて，ある物質系と相互作用している重力場を考えよう．物質系としては，たとえば完全流体でもよいしまた電磁場でもよい．いずれにしても1種の連続物体と考え，時刻 x^0 におけるこの連続物体の空間的分布状態を示す量を $\varphi_A(\vec{x},x^0)\overset{d}{\equiv}\varphi_A(x)$ と書く

ことにする．添字 A は $A=1, 2, \cdots, N$ とする．つまり物質のようすはN個のxの関数 $\varphi_A(x)$ で記述される．

物質系の時空的ふるまいをあたえる Lagrange 関数を

$$\mathfrak{L}_M \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\cdot L_M(\varphi_A,\ \partial_\mu\varphi_A,\ g_{\mu\nu},\ \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \tag{24.8}$$

とする．$\mathfrak{L}_M$ が一般の座標変換に対してスカラー密度としてふるまうためには，$\sqrt{-g}$ という因数が必要である．また，L_M の中には $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ とかアフィン係数 Γ を適当にさしはさまなければならない．

一方，重力場の Lagrange 関数としては次のものを採用することにする．

$$\mathfrak{L}_g \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,R = -\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\cdot G - \frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\mathfrak{D}^\mu$$

そこで全系の Lagrange 関数は

$$\mathfrak{L} \overset{d}{\equiv} \mathfrak{L}_M - \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,G - \frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\mathfrak{D}^\mu \tag{24.9}$$

となる．この $\mathfrak{L}$ から作られる作用積分

$$I = \int \mathfrak{L}d^4x$$

は，一般の座標変換に対して不変量である．

さてこの I に対して Hamilton の変分原理を適用してみよう．まず，物質系の基礎方程式は，φ_A の変分を考えることにより

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi_A} = \frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta\varphi_A} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathfrak{L}_M}{\partial\varphi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}_M}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)}\right\} = 0 \tag{24.10}$$

となる．一方，重力場に対しては

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \overset{d}{\equiv} \frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2\kappa}\frac{\delta(\sqrt{-g}\cdot R)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

ところで，(18.17) の $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ の定義にしたがえば，上の右辺の第1項は次のようになる．

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g_{\alpha\beta}}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\mu\nu}$$

そこで，(24.4) を使って，

$$\frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 0$$

または

$$\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\left\{\kappa T_{\mu\nu} - \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\right\} \overset{d}{\equiv} \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \tag{24.11}$$

となる．これは Einstein の基礎方程式にほかならない．

前にも述べたように，作用積分 I の積分領域 Ω の表面上で g の変分は 0 と仮定するならば，(24.9) の最後の項は不要となる．そこで，(24.11) は

$$\frac{\delta \mathfrak{L}^*}{\delta g^{\mu\nu}}=0, \qquad \mathfrak{L}^* \stackrel{d}{\equiv} \mathfrak{L}_M - \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,G \tag{24.11$'$}$$

としてもよい．

上述のように Einstein の方程式を Hamilton 原理から導き出すことは，Einstein の理論の からくり を理解するのに非常に役に立つ．しかし，次のように実用的立場からもこの Hamilton 原理は便利なものである．

いま，Schwarzschild の外部解を得るために，その基礎方程式を Hamilton 原理から求めてみよう．まず，ds^2 としては

$$ds^2=\sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2+f(r)\cdot\{\sum_{k=1}^{3}x^k dx^k\}^2-h(r)(dx^0)^2 \tag{24.12}$$

とおく．すなわち

$$\left.\begin{aligned} &g_{ik}=\delta_{ik}+f(r)\cdot x^i x^k \\ &g_{00}=-h \qquad\qquad i,\ k=1,\ 2,\ 3. \\ &g_{0i}=g_{i0}=0 \end{aligned}\right\} \tag{24.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &g^{ik}=\delta_{ik}-\frac{f(r)}{1+r^2\cdot f}\cdot x^i x^k \\ &g^{i0}=0 \\ &g^{00}=-\frac{1}{h} \end{aligned}\right\} \tag{24.14}$$

である．h, f は $r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$ だけの関数とする．また

$$\sqrt{-g}=\sqrt{h}\cdot\sqrt{1+fr^2}\stackrel{d}{\equiv}\varDelta$$

となる．そこで，f の代わりに

$$\sqrt{1+fr^2}\stackrel{d}{\equiv}\psi$$

とおいて，$\varDelta(r)$ と $\psi(r)$ について変分をとることにする．

さて，(24.13), (24.14) を使うと，物体のないところでは

$$\int\sqrt{-g}\cdot G d^4x=8\pi\int\left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)\cdot\frac{d\varDelta}{dr}\cdot r\cdot dr\cdot dx^0 \tag{24.15}$$

となる．

そこで，まず ψ について (24.15) の変分をとれば

$$\frac{d\Delta}{dr}=0$$

すなわち

$$\Delta=\sqrt{h}\cdot\sqrt{1+fr^2}=一定 \tag{24.16}$$

次に Δ について変分をとると，

$$\frac{d}{dr}\left\{\left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)r\right\}=0 \tag{24.17}$$

となる．(24.16)，(24.17) から

$$f=\frac{a}{r^2(r-a)} \qquad h=\left(1-\frac{a}{r}\right) \tag{24.18}$$

この a は積分定数であるが，r を十分大きくしたとき h と Newton のポテンシャルとを比べることにより決められる．その結果，この a は § 21 の Schwarzschild の外部解にでてくる a と同じものであることがわかる．

ここで，Schwarzschild の解と比べるのには次のような変換をすればよい．

$$x^i\to x^{i'}=\frac{r'}{r}x^i \qquad \iota=1,2,3$$

$$r=\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2 r'$$

これによって，

$$ds^2=\left(1+\frac{a}{4r'}\right)^4\{\sum_{k=1}^{3}(dx^{k'})^2\}-\left(\frac{1-\dfrac{a}{4r'}}{1+\dfrac{a}{4r'}}\right)^2(dx^0)^2 \tag{24.19}$$

となる．この式は (21.14) にほかならない．

以上のように，変分を使うと $R_{\mu\nu}$ の各成分を1つ1つ計算するというめんどうがはぶける．

§ 25. 作用積分を不変にする変分

これからしばらく一般相対論からはなれて，まず **Noether の定理** について述べる．この定理の応用として，いろいろの保存則や，第 IV 章にでてきた恒等式

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu}\equiv 0$$

$$G^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

を導き出してみせることにしよう．

まず，N 個の関数 $\varphi_A(x)$ $(A=1, 2, \cdots, N)$ によって記述される場を考える．この x はもちろん時空内の点を示す座標である．しかし，ここでは時空の幾何学的性質はどんなものであってもさしつかえない．たとえば Minkowski 型の時空でもよいし，また重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ が存在してもかまわない．たいせつなことは，4 個の座標成分の中で 1 個，たとえば x^0 が必ず時間的変数であるということである．

φ_A についても制限はない．これがテンソル場なら，A はテンソルの成分を示す添字と考えればよい．また，特殊相対論にでてくるスピノール場のときは，もちろん A はスピノール成分を示す．φ_A はまた必ずしもただ 1 種類の場を示すとはかぎらない．2 種類以上の場が共存するときは，これを一括して 1 組の $\varphi_A(x)$ で表わすものとする．つまり，数個のスピノールやテンソルの成分に通し番号をつけて，これらをひとまとめにして $\varphi_A(x)$ で示せばよい．もし重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ が存在するときは，この $g_{\mu\nu}$ も当然 φ_A の中に含めて扱わなければならない．

場のふるまいは，場の方程式と呼ばれる N 個の基礎方程式によって決められる．この連立方程式は，この物理系の Lagrange 関数 L がわかっていれば，Hamilton の原理にしたがって変分法から導き出される．

いま，Lagrange 関数を

$$L(\varphi_A, \partial_\mu\varphi_A) \tag{25.1}$$

とする．場の方程式は，作用積分

$$I=\int_\Omega L(\varphi_A, \partial_\mu\varphi_A)d^4x$$

の φ_A に対する変分をとればよい．すなわち

$$[L]^A \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_A}-\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)}\right\}=0 \tag{25.2}$$

が，場の基礎方程式である．

これから問題にすることは，作用積分 I がある種の変換に対して，その値が不変であるという特別な場合である．このようなときには，ある種の物理量について保存則が成立したり，またこの節のはじめに述べたような恒等式が存在する．このような問題を一般的に扱うのが不変変分法である．これについて特にくわしい研究を行なったのは Noether[*)] である．

---

*) E. Noether : Gött Nachr (1918) p. 235.

いま，次のような変換を考えよう．まず，座標系については

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} \overset{d}{\equiv} x^\mu + \delta x^\mu \tag{25.3}$$

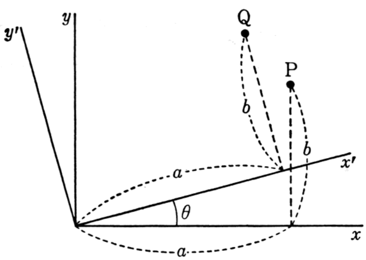
場の量 φ_A は

$$\varphi_A(x) \to \varphi'_A(x') \overset{d}{\equiv} \varphi_A(x) + \delta\varphi_A(x) \tag{25.3$'$}$$

のように変換されるものとする．δx も $\delta\varphi_A$ もともに無限小量と仮定し，すべて δ の1次までを考えに入れ，それ以上は無視する．(25.3)′ で注意すべきことは，$\varphi'_A(x')$ と $\varphi_A(x)$ とは同じ時空点における場の量であるということである．ただ，(25.3) のような座標変換が同時に行なわれているので，同じ点でも，その座標値は変換後には x' となっている．

(25.3)′ とは少しちがった次のような変分も定義することができる．

$$\bar{\delta}\varphi_A(a) \overset{d}{\equiv} \varphi'_A(x'=a) - \varphi_A(x=a) \tag{25.4}$$



第 4 図

この意味は，変換後の新しい座標値 $x^{\mu\prime}$ が a^μ という値をもつ時空点 (Q) と，もとの座標系で x^μ の値が a^μ に等しいような点 (P) における，φ の値の比較を示す．つまり，わかりやすく書くと

$$\bar{\delta}\varphi_A(a) \overset{d}{\equiv} \varphi'_A(\text{Q点}) - \varphi_A(\text{P点})$$

ということになる．

第4図は，2次元空間 (x, y) の無限小回転を図示したものである．$x^1 = x$，$x^2 = y$ とすると，θ が十分小さいとして

$$x^1 \to (x^1)' = x^1\cdot\cos\theta + x^2\cdot\sin\theta \approx x^1 + \theta\cdot x^2$$

$$x^2 \to (x^2)' = -x^1\sin\theta + x^2\cos\theta \approx x^2 - \theta\cdot x^1$$

すなわち

$$\delta x^1 = \theta\cdot x^2, \qquad \delta x^2 = -\theta\cdot x^1$$

である．いま，点 P のもとの座標を $x^1 = a$，$x^2 = b$ とすれば，この点の新しい座標は

$$\text{P} : (x^1)' = a + \theta b, \qquad (x^2)' = b - \theta a$$

また，点 Q の座標は

$$\text{Qの新座標} : (x^1)' = a, \quad (x^2)' = b$$

$$\text{古い座標} : x^1 = a - \theta b, \quad x^2 = b + \theta a$$

となる．

さらに，$\delta\varphi$，$\bar{\delta}\varphi$ については

$$\delta\varphi_A(x^1=a,\ x^2=b)\overset{d}{\equiv}\delta\varphi_A(a,\ b)=\varphi_A{}'\{(x^1)'=a+\theta b,\ (x^2)'=b-\theta a\}$$
$$-\varphi_A(x^1=a,\ x^2=b)=\varphi_A{}'(\mathrm{P})-\varphi_A(\mathrm{P})$$
$$\bar{\delta}\varphi_A(x^1=a,\ x^2=b)\overset{d}{\equiv}\varphi_A{}'\ \{(x^1)'=a,\ (x^2)'=b\}-\varphi_A(x^1=a, x^2=b)$$
$$=\varphi_A{}'(\mathrm{Q})-\varphi_A(\mathrm{P})$$

上の例から，$\delta\varphi$ と $\bar{\delta}\varphi$ との間の関係は容易に求められる．すなわち，一般的に

$$\bar{\delta}\varphi_A(x=a)\overset{d}{\equiv}\varphi_A{}'(x'=a)-\varphi_A(x=a)=\varphi_A{}'(x'=a+\delta x-\delta x)-\varphi_A(x=a)$$
$$=\varphi_A{}'(x'=a+\delta x)-\delta x^\nu\frac{\partial}{\partial x^{\nu\prime}}\varphi_A{}'(x'=a+\delta x)-\varphi_A(x=a)$$
$$=\delta\varphi_A(x=a)-\delta x^\nu\cdot\partial_\nu\varphi_A(x=a)$$

この計算で，δ^2 以上の無限小量は約束により無視した．このδとδ̄との関係はもっと一般的に次のように書ける．すなわち，φ_A とか，$\partial_\mu\varphi_A$ の任意の関数 $\Phi(\varphi_A,\partial_\mu\varphi_A)$ を考えよう．これに対して

$$\bar{\delta}\Phi=\delta\Phi-\delta x^\mu\cdot\partial_\mu\Phi \tag{25.5}$$

が成立する．

$\bar{\delta}\varphi_A$ が $\delta\varphi_A$ にくらべ便利なことは次の性質である．すなわち

$$\delta(\partial_\mu\varphi_A)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial}{\partial x_\mu{}'}\varphi_A{}'(x')-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_A(x)$$
$$=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\{\varphi_A(x)+\delta\varphi_A(x)\}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_A(x)$$

これに（25.3）を代入すると，結局

$$\delta(\partial_\mu\varphi_A)=\partial_\mu\delta\varphi_A-\partial_\mu(\delta x^\nu)\cdot\partial_\nu\varphi_A \tag{25.6}$$

となる．これに対して $\bar{\delta}\varphi$ のときは，（25.5）を使って

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\varphi_A)=\delta(\partial_\mu\varphi_A)-\delta x^\nu\cdot\partial_\nu(\partial_\mu\varphi_A)$$

この右辺第1項に（25.6）を代入すると，

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\varphi_A)=\partial_\mu(\bar{\delta}\varphi_A) \tag{25.7}$$

となる．

さて，(25.3) および (25.3)′ であたえられる変換に対して I は不変と仮定する．このことからどのような関係式が出るかについて次の節以下で述べよう．

§ 26.　Noether の第1定理

作用積分 I は変換 (25.3), (25.3)′ を同時に行なってもその値が変わらないとする．すなわち*)

$$\delta I \overset{d}{\equiv} \int L\{\varphi_A'(x'), \varphi_{A,\mu}'(x')\} d^4x' - \int L\{\varphi_A(x), \varphi_{A,\mu}(x)\} d^4x = 0 \qquad (26.1)$$

上の式の第1積分の積分領域は，積分変数が x' であるために数値的には第2積分の積分領域とちがうが，時空内の領域としては同じ領域である．この積分領域を Ω と記すことにする．

(26.1) に (25.3), (25.3)′ を代入すると，δ の2次以上を無視すれば，δI は次のように書ける**)．

$$\delta I = \int_\Omega \left[L\{\varphi_A(x) + \delta\varphi_A, \varphi_{A,\mu} + \delta\varphi_{A,\mu}\} \frac{\partial(x^{0\prime}\cdots x^{3\prime})}{\partial(x^0\cdots\cdot x^3)} - L\{\varphi_A, \varphi_{A,\mu}\} \right] d^4x$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_A}\delta\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_{A,\mu} + L\left\{ \frac{\partial(x^{0\prime}\cdots x^{3\prime})}{\partial(x^0\cdots\cdot x^3)} - 1 \right\} \right] d^4x$$

ところで，最後の項の関数行列式は δ の1次までの近似では

$$\frac{\partial(x^{0\prime}\cdots x^{3\prime})}{\partial(x^0\cdots\cdot x^3)} = 1 + \frac{\partial\,\delta x^\mu}{\partial x^\mu}$$

となる．また，(25.5) を使って上の式の $\delta\varphi$ を $\bar{\delta}\varphi$ で表わすと

$$\delta I = \int_\Omega [\bar{\delta} L + \partial_\mu(L\cdot\delta x^\mu)] d^4x \qquad (26.1)'$$

となる．ここに

$$\bar{\delta} L \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_A}\bar{\delta}\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\bar{\delta}\varphi_{A,\mu} = [L]^A \bar{\delta}\varphi_A + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\bar{\delta}\varphi_A \right)$$

のことである．この式を上の δI に代入すると，結局

$$\delta I = \int_\Omega \left[[L]^A \bar{\delta}\varphi_A + \partial_\mu\left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu\cdot\delta x^\nu \right\} \right] d^4x \qquad (26.2)$$

ここで $[L]^A$ は (25.2) で定義したように

$$[L]^A \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \right)$$

---

*) 記号の統一を欠くのでいささかよくないが，これからめんどうな計算をするのに便利なために，しばしば $\partial_\mu\varphi_A$ の代わりに $\varphi_{A,\mu}$ という記号を使う．

**) これから．どのような添字でも，同じ式の中に上下2個所に同じ添字が出てくるときは，テンソル計算のときと同じようにその添字の定義域について和をとるものと約束する．たとえば，φ_A の添字 A については1から N まで和をとるものとする．

また $T^{\mu}{}_{\nu}$ は，**正準エネルギー・運動量テンソル密度**と呼ばれるもので

$$T^{\mu}{}_{\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \varphi_{A,\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} \cdot L \tag{26.3}$$

である．

そこで，I の値が変換に対して不変ということは

$$\int_{\Omega} \left[[L]^{A} \bar{\delta} \varphi_{A} + \partial_{\mu} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \delta \varphi_{A} - T^{\mu}{}_{\nu} \cdot \delta x^{\nu} \right\} \right] d^4 x \equiv 0 \tag{26.4}$$

が恒等的に成り立つことである．恒等的に成り立つという意味は，φ_A が場の方程式の解であろうがそうでなかろうが，そんなことには無関係に成立することを意味する．また，積分域 Ω はどのようなものでもかまわない．

さて，これから (25.3) および (25.3)′ の変換として特に次のような場合を考えよう．すなわち

$$\left. \begin{aligned} \delta x^{\mu} &\overset{d}{\equiv} \sum_{r=1}^{n} \epsilon^{r} \cdot X_{r}{}^{\mu}(x) \overset{d}{\equiv} \epsilon^{r} \cdot X_{r}{}^{\mu}(x) \\ \delta \varphi_{A} &\overset{d}{\equiv} \epsilon^{r} \cdot M_{r,A}{}^{B} \cdot \varphi_{B} \end{aligned} \right\} \tag{26.5}$$

ここで，ϵ^r $(r=1, 2, \cdots, n)$ は n 個の無限小のパラメーターとする．$X_r{}^{\mu}$ は一般には x の関数である．$M_{r,A}{}^{B}$ はN行N列のマトリックス $\boldsymbol{M}_r$ の (A, B) 要素で，これは一般には x の関数としてよい．すなわち

$$(\boldsymbol{M}_r)_A{}^B \overset{d}{\equiv} M_{r,A}{}^{B} \qquad (r=1, 2, \cdots, n), \ (A, B=1, 2, \cdots, N)$$

さて，(26.4) は任意の Ω について成立するから，任意の時空点 x をとりかこむ無限に小さな 4 次元領域を Ω とすれば，(26.4) は

$$[L]^{A} \bar{\delta} \varphi_{A} + \partial_{\mu} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \delta \varphi_{A} - T^{\mu}{}_{\nu} \cdot \delta x^{\nu} \right\} \equiv 0 \tag{26.6}$$

という恒等式になる．これに (26.5) を代入すると，おのおののパラメーター ϵ^r の係数が恒等的に 0 とならなければいけないから

$$\begin{aligned} &-[L]^{A} \{ M_{r,A}{}^{B} \cdot \varphi_{B} - \varphi_{A,\mu} X_{r}{}^{\mu} \} \\ &\qquad \equiv \partial_{\mu} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} M_{r,A}{}^{B} \cdot \varphi_{B} - T^{\mu}{}_{\nu} \cdot X_{r}{}^{\nu} \right\} \end{aligned} \tag{26.6′}$$

となる．ここで，もしも場の方程式

$$[L]^{A} = 0 \tag{26.7}$$

を使うと，恒等式 (26.6)′ は

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} M_{r,A}{}^{B}\cdot\varphi_B - T^{\mu}{}_{\nu}\cdot X_r{}^{\nu}\right\} = 0 \tag{26.8}$$

となる．

(26.8) は $r=1, 2, \cdots, n$ に対してそれぞれ成立するから，n 個の保存則を導き出したわけである．この保存則は，(26.7) を使った結果出てきたものであるから，もちろん恒等式ではない．このように，場の方程式 (26.7) を満足する φ_A に対してだけ成立するような等式をわれわれは $=$ で示すことにする．これに対して，前にも述べたように，場の方程式の解であるか否かには無関係に成立するものは $\equiv$ で示して前者と区別する．

上に述べたように n 個のパラメーター ϵ^r を含む (25.3), (25.3)′ のような変換に対して I が不変のときは，必ずパラメーターの数に等しい保存量

$$J_r \overset{d}{\equiv} \int J_r{}^0(x)d^3x \qquad (r=1, 2, \cdots, n) \tag{26.9}$$

が存在することが示された．ここに

$$J_r{}^{\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} M_{r,A}{}^{B}\cdot\varphi_B - T^{\mu}{}_{\nu}\cdot X_r{}^{\nu} \tag{26.10}$$

$$\partial_\mu J_r{}^{\mu} = 0 \tag{26.8$'$}$$

である．このことを **Noether の第1定理** と呼ぶことにする．

(26.9) で定義された J_r が時間 x^0 に無関係なことは次のようにしてわかる．いま，(26.8)′ を時刻 $x^0=ct_0$ と時刻 $x^0=ct_1$ との間にはさまれた4次元領域にわたって積分してみる．ただし，空間座標 x^1, x^2, x^3 については全空間にわたって積分をする．そうすると

$$0 = \int \sum_{k=1}^{3} \partial_k J_r{}^k d^3x\cdot dx^0 + \int \partial_0 J_r{}^0 d^3x\cdot dx^0$$

これに Gauss の定理を用いると，第1項は空間的に無限の遠方にある表面積分となる．もし十分遠方では，すべての場の量 φ_A が十分に早く0になるとすれば，第1積分は0となってしまう．これに対して第2積分は x^0 についての積分ができて，その結果は

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} J_r{}^0(x^1, x^2, x^3, x^0=ct_1)d^3x - \int_{-\infty}^{\infty} J_r{}^0(x^1, x^2, x^3, x^0=ct_0)d^3x$$

すなわち，(26.9) の記号を使えば

$$J_r(x^0=ct_1) = J_r(x^0=ct_0) \tag{26.11}$$

つまり，時刻 x^0 に無関係で，したがって運動の恒量となっていることがわかる．

§ 27. 第 1 定理の応用例

(i) エネルギー・運動量の保存則

§ 26 で考えた Lagrange 関数 L は場の量，つまり力学変数 $\varphi_A(x)$ や $\varphi_{A,\mu}(x)$ が x の関数であるために，間接的に L も x の関数となっている．しかし，φ のほかに L の変数として x がなまに含まれているような場合については § 26 では考えなかった．L がなまに x を含む場合でも（26.2）が成立することは容易に確かめることができる．

ところで，L がなまの x を含まないときは，作用積分 I は

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} \stackrel{d}{\equiv} x^\mu + \epsilon^\mu \qquad (\mu = 0, \cdots, 3)$$

$$\delta\varphi_A(x) \stackrel{d}{\equiv} 0, \qquad \bar{\delta}\varphi_A \stackrel{d}{\equiv} -\varphi_{A,\mu}\cdot\epsilon^\mu \tag{27.1}$$

に対して値が変わらない．このことは証明をするまでもなく明らかなことである．（27.1）は座標軸をそれぞれ ϵ^μ だけ平行にずらすことである．もちろん ϵ は x に無関係なパラメーターである．

（27.1）を（26.6）に代入すると

$$-[L]^A\cdot\varphi_{A,\rho}\epsilon^\rho - \partial_\mu\{T^\mu{}_\nu\cdot\epsilon^\nu\} \equiv 0$$

あるいは，場の方程式を作って

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{27.2}$$

これは，**正準エネルギー・運動量テンソルの保存則**を示す．すなわち，（26.9）にならって

$$P_\nu \stackrel{d}{\equiv} \int T^0{}_\nu(x)d^3x \tag{27.3}$$

とおくと，これは物理系全体のエネルギーおよび運動量を表わし，§ 26 で証明したように時間 x^0 に無関係な一定の値をもつ，

(ii) 角運動量保存則

角運動量の保存則を出すのには x^0 はそのままにして，空間座標軸の回転に対して I が不変である場合を考えればよい．しかしここではもう少し一般化して，I が Lorentz 変換に対して不変である場合を考えてみる．

無限小 Lorentz 変換

$$\left.\begin{aligned} x^\mu \to x^{\mu\prime} &= x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu\cdot x^\nu \\ \epsilon_{\mu\nu} &= -\epsilon_{\nu\mu} \end{aligned}\right\} \tag{27.4}$$

に対して，場の量 φ_A は

$$\varphi_A(x)\to\varphi_A{}'(x')=\varphi_A(x)+\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(M_{\mu\nu})_A{}^B\cdot\varphi_B \tag{27.5}$$

のように変換されるものとする．一般論の ϵ^r $(r=1,2,\cdots,n)$ に相当するものは，ここでは6個の $\epsilon_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,\cdots,3)$ である．ここで，添字の上げ，下げは，$\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ によって行なわれる．φ_A がたとえばベクトル場 $\varphi_\mu(x)$ のときには

$$\varphi_\mu{}'(x')=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\varphi_\nu(x)=(\delta^\nu_\mu-\epsilon^\nu{}_\mu)\varphi_\nu(x)$$

$$=\varphi_\mu(x)+\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu\cdot\varphi_\nu(x)$$

$$(M_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu=\eta_{\rho\mu}\delta^\nu_\sigma-\eta_{\sigma\mu}\delta^\nu_\rho=-(M_{\sigma\rho})_\mu{}^\nu$$

となる．

もし I が Lorentz 不変ならば (26.8)′ が成立する．ところで，記号を § 26 とそろえるために

$$\delta x^\mu=\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu=\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\cdot X_{\rho\sigma}{}^\mu$$

とすると

$$X_{\rho\sigma}{}^\mu=(\delta^\mu_\rho\eta_{\sigma\nu}-\delta^\mu_\sigma\eta_{\rho\nu})x^\nu$$

となる．そこで，(26.10) から，

$$R_{\rho\sigma}{}^\mu\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}(M_{\rho\sigma})_A{}^B\cdot\varphi_B-(T^\mu{}_\rho\cdot x_\sigma-T^\mu{}_\sigma\cdot x_\rho) \tag{27.6}$$

となる．ここでは (26.10) の $J_r{}^\mu$ という記号の代わりに特別に $R_{\rho\sigma}{}^\mu$ という記号を使った．保存則は微分形式で書くと

$$\partial_\mu R_{\rho\sigma}{}^\mu=0 \tag{27.7}$$

これを積分すると

$$R_{\rho\sigma}=-R_{\sigma\rho}\overset{d}{\equiv}\int R_{\rho\sigma}{}^0(x)d^3x \tag{27.8}$$

という6個の保存量が導かれる．

上の保存量の中で，$i,k=1,2,3$ とするとき

$$R_{ik}\overset{d}{\equiv}\int\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}}(M_{ik})_A{}^B\cdot\varphi_B-(T^0{}_i\cdot x^k-T^0{}_k\cdot x^i)\right\}d^3x$$

は，物理系全体のもつ角運動量である．この第2，第3項は点 x にある体積 d^3x の中の運動量 $T^0{}_i(x)\,d^3x$ に対応する**軌動角運動量**を示す．これに対して，第1項は**スピン角運動量**と呼ばれる．これは φ_A の Lorentz 変換に対する変換性，つまり行列

M_{ik} によって決まる量である．

このスピン角運動量は，対称なエネルギー運動量テンソルを定義するときに大事な役目をする．われわれは § 26 で正準エネルギー運動量テンソル $T^{\mu}{}_{\nu}$ を定義した．この右下についている添字 ν を $\eta^{\rho\nu}$ によって右上にあげて

$$T^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} T^{\mu}{}_{\rho} \cdot \eta^{\rho\nu}$$

としたときに，一般には $\mu\nu$ の入れ換えについて $T^{\mu\nu}$ は対称ではない．

一方， Einstein の場の方程式にでてくるエネルギー運動量テンソル密度は $\mu\nu$ について対称である．それゆえ，われわれは 2 種類のエネルギー・運動量テンソルを知っているわけである．この両者の関係についてくわしく議論することは少し一般相対論の話の本筋からそれるので，詳細は巻末の付録にゆずる（§ **A.3** 参照）．ただここでは，両種のエネルギー運動量テンソルの差は，前に述べたスピン角運動量と密接な関係にあることを注意しておくにとどめる．

(iii) 電荷の保存則

電荷をもった φ_A という場が電磁場と相互作用している場合を考える．φ_A は複素数だとし，この複素共役な関数を $\overline{\varphi}^A$ と書くことにする．簡単のために重力場は無視する．したがって， 特殊相対論の範囲で議論する． 電磁場の 4 元ポテンシャルを A_μ とするとき，Lagrange 関数は

$$L \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - (\partial_\mu + ieA_\mu)\overline{\varphi}^A \cdot (\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi_A - m^2 \overline{\varphi}^A \varphi_A \tag{27.9}$$

であるとする．ここに m は定数で，これは φ - 場に伴う量子の質量を意味する．また，$f_{\mu\nu}$ は前に述べたように

$$f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

である． e は φ - 量子のもつ電荷である．

さて，(27.9) は

$$\delta x^\mu \overset{d}{\equiv} 0, \qquad \delta A_\mu \overset{d}{\equiv} 0$$

$$\varphi_A \to \varphi_A{}'(x) \overset{d}{\equiv} e^{i\epsilon} \cdot \varphi_A(x) \approx \varphi_A(x) + i\epsilon\varphi_A(x)$$

$$\overline{\varphi}^A \to \overline{\varphi}^{A'}(x) \overset{d}{\equiv} \overline{\varphi}^A(x) e^{-i\epsilon} \approx \overline{\varphi}^A(x) - i\epsilon\overline{\varphi}^A(x)$$

に対して不変である．いまはパラメター ϵ は 1 個であるから，これに対応して保存量も 1 個出てくる．すなわち，(26.10) に対応して

$$J^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} (i\delta^B_A)\varphi_B + \frac{\partial L}{\partial \overline{\varphi}^A{}_{,\mu}} (-i\delta^A_B)\overline{\varphi}^B$$

$$= -i(\partial^\mu + ieA^\mu)\overline{\varphi}^A \cdot \varphi_A + i\overline{\varphi}^A \cdot (\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi_A$$

また，保存則は

$$Q \stackrel{d}{\equiv} \int J^0 d^3x = i\int \{\bar{\varphi}^A\cdot(\partial^0 - ieA^0)\varphi_A - (\partial^0 + ieA^0)\bar{\varphi}^A\cdot\varphi_A\} d^3x$$

$$= 一定$$

となる．あるいは，微分形式で書くと

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

である．この Q は φ－場のもつ全電荷に比例する．このことは電磁場の方程式をしらべてみればわかる．すなわち，(27.9) の A_μ についての変分から Maxwell の方程式は次のようになる．

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = -ie\bar{\varphi}^A\cdot(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi_A + ie(\partial^\mu + ieA^\mu)\bar{\varphi}^A\cdot\varphi_A$$

$$= -eJ^\mu = (電流密度)$$

それゆえ

$$(-e)Q = \int \{-eJ^0\} d^3x = (\varphi - 場の全電荷)$$

となる．

§ 28. Noether の第2定理

変換 (26.5) の代わりに，こんどは n 個の無限小の任意関数 $\lambda^r(x)$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ を含む変換

$$\left.\begin{aligned} \delta x^\mu &\stackrel{d}{\equiv} \sum_{r=1}^{n} \lambda^r(x)\cdot X_r{}^\mu(x) \stackrel{d}{\equiv} \lambda^r\cdot X_r{}^\mu \\ \delta\varphi_A &\stackrel{d}{\equiv} \lambda^r(x)\cdot M_{r,A}(\varphi) + \lambda^r{}_{,\mu}(x)\cdot N^\mu_{r,A}(\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (28.1)$$

を考えてみよう．ここで，$M_{r,A}$ $N^\mu_{r,A}$ は，一般に x や φ の既知関数である．しかし，$X_r{}^\mu$ は簡単のために x だけの既知関数とする．

いま，I が (28.1) という変換に対して不変とする．そこで，(28.1) を (26.4) に代入して

$$\int_\Omega \left[[L]^A\cdot\{M_{r,A}\cdot\lambda^r + N^\mu_{r,A}\lambda^r{}_{,\mu} - \varphi_{A,\mu}X_r{}^\mu\cdot\lambda^r\} + \partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu\delta x^\nu\right\}\right] d^4x \equiv 0$$

この積分の第1項は部分積分を使って書き直すと

$$\int_\Omega \left[[L]^A\cdot\{M_{r,A} - \varphi_{A,\mu}X_r{}^\mu\} - \partial_\mu\{[L]^A\cdot N^\mu_{r,A}\}\right]\lambda^r d^4x$$

$$+ \int_\Omega \partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu\cdot\delta x^\nu + [L]^A N^\mu_{r,A}\cdot\lambda^r\right\} d^4x \equiv 0 \qquad (28.2)$$

ここで Ω はなんでもよいから，§ 26 の議論と同様にして（28.2）の被積分関数自身が $\equiv 0$ となる．すなわち

$$\Big[[L]^A\cdot\{M_{r,A}-\varphi_{A,\mu}X_r{}^\mu\}-\partial_\mu\{[L]^A\cdot N^\mu_{r,A}\}\Big]\lambda^r$$
$$+\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A-T^\mu{}_\nu\cdot\delta x^\nu+[L]^A\cdot N^\mu_{r,A}\cdot\lambda^r\right\}\equiv 0 \tag{28.3}$$

となる．

ところで λ^r は全く任意の関数であるから，特に Ω の表面上で λ^r，$\partial_\mu\lambda^r$ が 0 になるように選べば（28.2）の第 2 積分は 0 となる．つまり，これは Gauss の定理により Ω の表面上での積分になるから，上に述べた特別な λ^r のときはこの積分は 0 となる．そこでこのような λ に対しては（28.2）は第 1 積分だけになる．すなわち

$$\int_\Omega\Big[[L]^A\cdot\{M_{r,A}-\cdots\}-\partial_\mu\{\cdots\}\Big]\cdot\lambda^r\cdot d^4x\equiv 0 \tag{28.2$'$}$$

（28.2)$'$ の $\equiv 0$ の意味は，φ_A がなんであろうとも，また Ω の表面では 0 になるという制限以外には全く勝手な λ^r に対して常に 0 になるという意味である．そこで（28.2)$'$ から，λ^r に無関係な恒等式

$$[L]^A\cdot\{M_{r,A}-\varphi_{A,\mu}X_r{}^\mu\}-\partial_\mu\Big\{[L]^A\cdot N^\mu_{r,A}\Big\}\equiv 0 \tag{28.4}$$

が出てくる．これは任意の φ_A に対して成立する恒等式である．

（28.4）を（28.3）の第 1 項に代入すると，（28.3）は結局

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A-T^\mu{}_\nu\delta x^\nu+[L]^A\cdot N^\mu_{r,A}\cdot\lambda^r\right\}\equiv 0 \tag{28.5}$$

となる．つまり，恒等式（28.3）は 2 組の恒等式（28.4）および（28.5）に分かれてしまった．

（28.5）に（28.1）を代入して整理すると

$$\partial_\mu\{A^\mu{}_r\cdot\lambda^r+B_r{}^{\mu\nu}\lambda^r{}_{,\nu}\}\equiv 0 \tag{28.5$'$}$$

となる．ここに

$$\left.\begin{aligned}A^\mu{}_r&\stackrel{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}-T^\mu{}_\nu\cdot X_r{}^\nu+[L]^A\cdot N^\mu_{r,A}\\ B_r{}^{\mu\nu}&\stackrel{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}N^\nu_{r,A}\end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

（28.5)$'$ は

$$\lambda^r\partial_\mu A^\mu{}_r+\lambda^r{}_{,\mu}\{A^\mu{}_r+\partial_\nu B_r{}^{\nu\mu}\}+B_r{}^{\mu\nu}\cdot\lambda^r{}_{,\nu\mu}\equiv 0$$

であるから，λ^r の各階微分が全く互いに独立であることに注意すれば，上の式から

$$\partial_\mu A^\mu{}_r \equiv 0 \tag{28.7}$$

$$A^\mu{}_r + \partial_\nu B_r{}^{\nu\mu} \equiv 0 \tag{28.8}$$

$$B_r{}^{\mu\nu} + B_r{}^{\nu\mu} \equiv 0 \tag{28.9}$$

となる.

結局，任意関数 λ を含んだ1個の恒等式(28.3)は，λ に無関係な4組の恒等式(28.4), (28.7)～(28.9) に分かれたわけである. 以上のように，変換 (28.1) に対して I が不変なときは，(28.4)，(28.7)～(28.9) のような恒等式が存在する. また逆に，このような恒等式があれば I は不変になることも証明できる. この事実を **Noether の第 2 定理**と呼ぶことにしよう.

これから上に導き出した恒等式について少しくわしく考えてみよう. まず，(28.4) は N 個の場の方程式

$$[L]^A = 0$$

の間に，n 個の関数関係が存在することを示している. したがって，見かけ上方程式は N 個あっても，N 個の未知関数 φ_A を決定するのには n 個だけ不足していることになる. ところで，I が (28.1) に対して不変ということは

$$I' \overset{d}{\equiv} \int_\Omega L\{\varphi_A'(x'), \varphi_{A,\mu}'(x')\} d^4x' \equiv \int_\Omega L\{\varphi_A(x), \ \varphi_{A\mu}(x)\} d^4x \overset{d}{\equiv} I \tag{28.10}$$

のことである.

いま，場の方程式を導き出すために，Ω 内の各点における $\varphi_A(x)$ の値を $\varDelta\varphi_A(x)$ だけ変分させると，これに応じて $\varphi_A'(x')$ も

$$\varDelta\varphi_A'(x') \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\varphi_A'(x')}{\partial\varphi_B(x)} \cdot \varDelta\varphi_B(x)$$

だけ変化する. そこでこれに対応する I' の変化は

$$\varDelta I' \overset{d}{\equiv} \int_\Omega \left\{ \frac{\partial L}{\partial\varphi_A'(x')} - \partial'_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}'(x')} \right) \right\} \varDelta\varphi_A'(x') d^4x' \tag{28.11}$$

となる. ここで場の方程式を出すときに常に使う仮定，すなわち Ω の表面上で，$\varDelta\varphi_A(x) = 0$，$\varDelta\varphi_A'(x') = 0$ を用いた. そこで (28.11) と (28.10) から

$$\Big[L[\varphi'(x')]\Big]^B \cdot \frac{\partial\varphi_B'(x')}{\partial\varphi_A(x)} \cdot \frac{\partial(x^{0\prime}\cdots x^{3\prime})}{\partial(x^0\cdots x^3)} \equiv \Big[L[\varphi(x)]\Big]^A = 0$$

となる. すなわち

$$\Big[L[\varphi(x)]\Big]^A = 0$$

ならば，

$$\Big[L[\varphi'(x')]\Big]^B=0 \qquad \text{または} \qquad \Big[L[\varphi'(x)]\Big]^B=0$$

となる．つまり，$\varphi_A(x)$ が場の方程式の解ならば，$\varphi_A'(x)$ もまた解であることがわかった．すなわち，場の方程式の解は n 個の不定関数 $\lambda^r(x)$ $(r=1,\cdots,n)$ をもっていることを意味する．このことが（28.4）という恒等式の原因である．

（28.7）は（28.8），（28.9）から導き出される．この（28.7）に場の方程式を代入すると，

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}-T^\mu{}_\nu\cdot X_r{}^\nu\right\}=0 \tag{28.12}$$

という保存則が出る．そこで，（26.9）にならって 3 次元空間全体にわたって積分すると

$$J_r\overset{d}{\equiv}\int\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}}M_{r,A}-T^0{}_\nu\cdot X_r{}^\nu\right\}d^3x=\int A^0{}_r(x)d^3x$$

$$\equiv-\int\partial_\nu B_r{}^{\nu0}d^3x=\text{一定} \qquad (r=1,\cdots,n)$$

となる．

ところが，（28.9）から

$$B_r{}^{\nu0}=\frac{1}{2}(B_r{}^{\nu0}-B_r{}^{0\nu})\overset{d}{\equiv}B_r{}^{[\nu0]}=-B_r{}^{[0\nu]}$$

となるから

$$J_r=-\sum_{k=1}^{3}\int\partial_k B_r{}^{[k,0]}d^3x=-\int B_r{}^{[k,0]}d\sigma_k \tag{28.13}$$

ここで，$d\sigma^k$ は

$$d\sigma_1=dx^2dx^3, \qquad d\sigma_2=dx^3dx^1, \qquad d\sigma_3=dx^1dx^2$$

によって定義される．つまり J_r は 3 次元空間の無限に遠方における表面積分(2 次元的）によってあたえられる．それゆえ，もし場の量 φ が遠方で十分に早く 0 になるような場合には，この J_r はすべて 0 となってしまう．

ここで φ_A に正準共役な量を定義しておこう．（付録 § **A. 4** 参照） それは

$$\pi^A\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}} \tag{28.14}$$

であたえられる．これを使うと（28.9）の $\mu=\nu=0$ とおくときに

$$B_r{}^{00}\overset{d}{\equiv}\pi^A\cdot N^0_{r,A}(\varphi)\equiv0 \tag{28.15}$$

となる．この式は $2N$ 個の正準変数 $\varphi_A(x)$，$\pi^B(x)$ $(A,B=1,\cdots,N)$ の間に n 個の関係式が存在することを示す．つまり，元来独立であるべき $2N$ 個の変数が実はそうで

ないことになる．この事情はこの物理系を正準変数を使って記述する際に困難な問題を引き起こす．

§ 29. 第 2 定理の応用例

(i) ゲージ変換

例として Lagrange 関数 (27.9) を考えてみよう．このLは

$$\left.\begin{aligned} \delta x^\mu &\overset{d}{\equiv} 0 \\ \delta A_\mu &\overset{d}{\equiv} \partial_\mu \lambda \\ \delta \varphi_A &\overset{d}{\equiv} e^{ie\lambda}\varphi_A - \varphi_A \approx ie\lambda\cdot\varphi_A \\ \delta \overline{\varphi}^A &\overset{d}{\equiv} -ie\lambda\cdot\overline{\varphi}^A \end{aligned}\right\} \tag{29.1}$$

に対して不変である．ここで $\lambda(x)$ は任意のスカラー関数である．そこで §28 の議論をそのままくり返すと，(28.4) に対応して

$$ie[L]^A\varphi_A - ie\overline{\varphi}^A[L]_A - \partial_\mu[L]^\mu \equiv 0 \tag{29.2}$$

となる．ここで次の記号を使った．

$$[L]^A \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\right) = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\overline{\varphi}^A - m^2\overline{\varphi}^A$$

$$[L]_A \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \overline{\varphi}^A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{\varphi}^A{}_{,\mu}}\right) = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi_A - m^2\varphi_A$$

$$\begin{aligned} [L]^\mu &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) \\ &= ie\{(\partial^\mu + ieA^\mu)\overline{\varphi}^A\cdot\varphi_A - \overline{\varphi}^A\cdot(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi_A\} - \partial_\nu f^{\mu\nu} \end{aligned}$$

実際にこれらの式を (29.2) の左辺に代入すれば恒等的に 0 となることがわかる．

次に (28.6) で定義される A, B は，いまの場合には，添字 r は不要となって

$$\boldsymbol{A}^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} ie\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \overline{\varphi}^A{}_{,\mu}}(-ie)\overline{\varphi}^A + [L]^\mu = -\partial_\nu f^{\mu\nu} \tag{29.3}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -f^{\mu\nu} \tag{29.4}$$

となる．それゆえ，(28.7)～(28.9) の恒等式は要するに

$$f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$$

ということを示しているのにほかならない．しかし，もし場の方程式

$$[L]^\mu \overset{d}{\equiv} j^\mu - \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0$$

$$j^\mu \overset{d}{\equiv} ie\{(\partial^\mu + ieA^\mu)\overline{\varphi}^A\cdot\varphi_A - \overline{\varphi}^A\cdot(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi_A\}$$

を使うならば，(29.3) は

$$A^\mu = \frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}} ie\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial\overline{\varphi}^A{}_{,\mu}}(-ie)\overline{\varphi}^A = -j^\mu \tag{29.3$'$}$$

となる.

そこで，恒等式 (28.7) は電荷の保存則

$$-\partial_\mu j^\mu = 0$$

となる. また，(28.8) は

$$(-j^\mu) + \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0$$

となり，これは電磁場の方程式にほかならない.

最後に (28.9) は

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \equiv -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}$$

つまり，ゲージ変換に対して不変な Lagrange 関数Lに含まれる A_μ の微係数は

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

という特別な組み合わせだけで現われることを示す.

(ii) 一般座標変換

Lagrange 関数として

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\,R = \mathfrak{G} + \partial_\mu \mathfrak{D}^\mu \tag{29.5}$$

$$\mathfrak{G} = \sqrt{-g}\cdot g^{\rho\sigma}\{\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\tau_{\lambda\tau} - \Gamma^\lambda_{\rho\tau}\Gamma^\tau_{\sigma\lambda}\}$$

$$\mathfrak{D}^\mu = \sqrt{-g}\,\{g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - g^{\rho\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\}$$

とおく.

いま，無限小座標変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} \overset{d}{\equiv} x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \lambda^\mu(x)$$

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma}(x) \to g^{\rho\sigma\prime}(x') &\overset{d}{\equiv} g^{\rho\sigma}(x) + \delta g^{\rho\sigma} \\ &\overset{d}{\equiv} g^{\rho\sigma}(x) + \lambda^\rho{}_{,\tau} g^{\tau\sigma} + \lambda^\sigma{}_{,\tau} g^{\rho\tau} \end{aligned} \tag{29.6}$$

に対して，もちろん

$$I = \int \mathfrak{L}\, d^4x$$

は不変である. そこで，(26.1)$'$ に相当して

$$\bar{\delta}\mathfrak{L} + \partial_\mu(\mathfrak{L}\cdot\delta x^\mu)$$
$$= [\mathfrak{G}]_{\rho\sigma}\bar{\delta}g^{\rho\sigma} + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}\delta g^{\rho\sigma} - \left(\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}g^{\rho\sigma}{}_{,\nu} - \delta^\mu_\nu\mathfrak{G}\right)\delta x^\nu\right]$$
$$+ \partial_\mu\bar{\delta}\mathfrak{D}^\mu + \partial_\mu[\partial_\nu\mathfrak{D}^\nu\cdot\delta x^\mu] \equiv 0 \tag{29.7}$$

ここで，(24.7) から

$$[\mathfrak{G}]_{\rho\sigma} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\,G_{\rho\sigma} = \sqrt{-g}\left(R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}R\right) \overset{d}{\equiv} \mathfrak{G}_{\rho\sigma}$$

また，簡単のために

$$\mathfrak{U}^\mu{}_\nu \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}g^{\rho\sigma}{}_{,\nu} - \delta^\mu_\nu\mathfrak{G}\right\} \tag{29.8}$$

とおくと，(29.7) は

$$-\lambda^\alpha[2\cdot\partial_\mu\mathfrak{G}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{G}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}{}_{,\alpha}] + \partial_\mu\Big[2\lambda^\rho\{\kappa\mathfrak{U}^\mu{}_\rho + \mathfrak{G}^\mu{}_\rho\}$$
$$+ \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}(g^{\tau\sigma}\lambda^\rho{}_{,\tau} + g^{\tau\rho}\lambda^\sigma{}_{,\tau}) + \bar{\delta}\mathfrak{D}^\mu + \lambda^\mu\cdot\partial_\nu\mathfrak{D}^\nu\Big] \equiv 0 \tag{29.7$'$}$$

これは (28.3) に相当する恒等式である．そこで，§28 の一般論にしたがって，これから2組の恒等式が得られる．すなわち

$$\partial_\mu\mathfrak{G}^\mu{}_\alpha + \frac{1}{2}\mathfrak{G}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}{}_{,\alpha} = \sqrt{-g}(\nabla_\mu G^\mu{}_\alpha) \equiv 0 \tag{29.9}$$

および

$$\partial_\mu\left[2\lambda^\rho\{\kappa\mathfrak{U}^\mu{}_\rho + \mathfrak{G}^\mu{}_\rho\} + 2\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}g^{\tau\sigma}\cdot\lambda^\rho{}_{,\tau} + \bar{\delta}\mathfrak{D}^\mu + \lambda^\mu\cdot\partial_\nu\mathfrak{D}^\nu\right] \equiv 0 \tag{29.9$'$}$$

である．

(29.9) はよく知られた恒等式である（(13.13) 参照)．これに Einstein の場の方程式

$$\mathfrak{G}^\mu{}_\alpha = \kappa\mathfrak{T}^\mu{}_\alpha$$

を代入すれば

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\alpha = 0 \tag{29.10}$$

となる．ここで $T^{\mu\nu}$ は重力場の源となる物質場の対称エネルギー運動量テンソルであることは，いうまでもない．

次に (29.9)′ について考えよう．まず

$$\bar{\delta}\mathfrak{D}^\mu = \frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\rho\sigma}}\cdot\delta g^{\rho\sigma} + \frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\lambda}}\delta g^{\rho\sigma}{}_{,\lambda} - \frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial x^\nu}\cdot\lambda^\nu$$
$$= 2\frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\rho\sigma}}\cdot\lambda^\rho{}_{,\tau}g^{\tau\sigma} + 2\frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\lambda}}(\lambda^\rho{}_{,\tau\lambda}g^{\tau\sigma} + \lambda^\rho{}_{,\tau}g^{\tau\sigma}{}_{,\lambda})$$ （次ページへつづく）

$$-\frac{\partial \mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\lambda}} g^{\rho\sigma}{}_{,\nu}\lambda^\nu{}_{,\lambda} - \frac{\partial \mathfrak{D}^\mu}{\partial x^\nu}\cdot\lambda^\nu$$

これを (29.9)′ に代入すると

$$\partial_\mu[A^\mu{}_\alpha, \lambda^\alpha + B^{\mu,\tau}{}_\alpha\cdot\lambda^\alpha{}_{,\tau} + C^{\mu(\beta\tau)}{}_\alpha\cdot\lambda^\alpha{}_{,\beta\tau}] \equiv 0$$

ここで A, B, C は

$$A^\mu{}_\alpha \overset{d}{\equiv} 2(\kappa\mathfrak{U}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{G}^\mu{}_\alpha) + \delta^\mu_\alpha\cdot\partial_\nu\mathfrak{D}^\nu - \partial_\alpha\mathfrak{D}^\mu$$

$$B^{\mu,\tau}{}_\alpha \overset{d}{\equiv} 2\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\alpha\sigma}{}_{,\mu}} g^{\tau\sigma} + 2\frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\alpha\sigma}} g^{\tau\sigma} + 2\frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\alpha\sigma}{}_{,\lambda}} g^{\tau\sigma}{}_{,\lambda} - \frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} g^{\rho\sigma}{}_{,\alpha}$$

$$C^{\mu(\beta\tau)}{}_\alpha \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\alpha\sigma}{}_{,\beta}} g^{\tau\sigma} + \frac{\partial\mathfrak{D}^\mu}{\partial g^{\alpha\sigma}{}_{,\tau}} g^{\beta\sigma} \equiv C^{\mu(\tau\beta)}{}_\alpha$$

のことである．

そこで，(28.7)～(28.9) に対応して

$$\partial_\mu A^\mu{}_\alpha \equiv 0 \tag{29.11}$$

$$A^\mu{}_\alpha + \partial_\nu B^{\nu,\mu}{}_\alpha \equiv 0 \tag{29.12}$$

$$\frac{1}{2}(B^{\mu,\nu}{}_\alpha + B^{\nu,\mu}{}_\alpha) + \partial_\rho C^{\rho(\mu\nu)}{}_\alpha \equiv 0 \tag{29.13}$$

$$C^{\rho(\mu\nu)}{}_\alpha + C^{\mu(\nu\rho)}{}_\alpha + C^{\nu(\rho\mu)}{}_\alpha \equiv 0 \tag{29.14}$$

が出てくる．

さて，(29.11) に $A^\mu{}_\alpha$ の定義を使うと

$$\partial_\mu\{\kappa\mathfrak{U}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{G}^\mu{}_\alpha\} \equiv 0$$

もし Einstein の方程式を使えば

$$\partial_\mu\{\mathfrak{U}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{T}^\mu{}_\alpha\} = 0 \tag{29.15}$$

となる．

(29.12) に Einstein の方程式を使うと

$$2\kappa\{\mathfrak{U}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{T}^\mu{}_\alpha\} + \delta^\mu_\alpha\partial_\nu\mathfrak{D}^\nu - \partial_\alpha\mathfrak{D}^\mu + \partial_\nu B^{\nu,\mu}{}_\alpha = 0 \tag{29.16}$$

あるいは

$$\mathfrak{U}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{T}^\mu{}_\alpha = \frac{1}{2\kappa}\{\partial_\alpha\mathfrak{D}^\mu - \delta^\mu_\alpha\partial_\nu\mathfrak{D}^\nu\} - \frac{1}{4\kappa}\partial_\nu(B^{\nu,\mu}{}_\alpha - B^{\mu,\nu}{}_\alpha)$$

$$-\frac{1}{4\kappa}\partial_\nu(B^{\nu,\mu}{}_\alpha + B^{\mu,\nu}{}_\alpha)$$

この最後の項に (29.13) を使って

$$\mathfrak{U}^\mu{}_\alpha + \mathfrak{T}^\mu{}_\alpha = \frac{1}{2\kappa}\partial_\nu\left[(\delta^\nu_\alpha\mathfrak{D}^\mu - \delta^\mu_\alpha\mathfrak{D}^\nu) + \frac{1}{2}(B^{\mu,\nu}{}_\alpha - B^{\nu,\mu}{}_\alpha) + \partial_\rho C^{\rho(\mu\nu)}{}_\alpha\right] \tag{29.16$'$}$$

いま

$$B^{[\mu,\nu]}{}_{\alpha} = -B^{[\nu,\mu]}{}_{\alpha} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(B^{\mu,\nu}{}_{\alpha} - B^{\nu,\mu}{}_{\alpha})$$

と書くと，

$$\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\alpha} + \mathfrak{T}^{\mu}{}_{\alpha} = \frac{1}{2\kappa}\partial_{\nu}\Big[(\delta^{\nu}_{\alpha}\mathfrak{D}^{\mu} - \delta^{\mu}_{\alpha}\mathfrak{D}^{\nu}) + B^{[\mu,\nu]}{}_{\alpha}\Big] + \frac{1}{2\kappa}\partial_{\nu}\partial_{\rho}C^{\rho(\mu\nu)}{}_{\alpha} \tag{29.17}$$

この右辺の第1項は，[　] の中が ν, μ について反対称になっているから，両辺に ∂_{μ} を掛ければこの項は0となる．最後の項も恒等式（29.14）のために ∂_{μ} を掛ければ恒等的に0となる．このことから（29.15）が成り立つことが一目瞭然となる．

§30. 重力場のエネルギー・運動量

重力場の源となる物質の対称エネルギー・運動量テンソル密度 $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ は，すでに何度も述べたように

$$\partial_{\mu}\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\nu} \tag{30.1}$$

を満足する．この右辺は一般には0にはならないから，（26.11）を証明するのに使った論法はここでは役に立たない．

そこで，（30.1）の右辺をなんとかして

$$\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\nu} = -\partial_{\mu}\tau^{\mu}{}_{\nu}$$

のように書きかえることができないであろうか．このような $\tau^{\mu}{}_{\nu}$ という量をみつけることができれば（30.1）は

$$\partial_{\mu}(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu} + \tau^{\mu}{}_{\nu}) = 0$$

となり，したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathfrak{T}^{0}{}_{\nu} + \tau^{0}{}_{\nu})d^{3}x$$

という保存量を導きだすことができる．

ところが $\tau^{\mu}{}_{\nu}$ を作ることは幸いにして可能である．すなわち，（29.15）という関係式

$$\partial_{\mu}(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu} + \mathfrak{U}^{\mu}{}_{\nu}) = 0 \tag{30.2}$$

がある．この式から

$$P_{\mu} \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty}(\mathfrak{T}^{0}{}_{\mu} + \mathfrak{U}^{0}{}_{\mu})d^{3}x \tag{30.3}$$

は保存量となる*).

(30.3) の $\mathfrak{T}^0{}_\mu$ が物質のエネルギー・運動量密度であることはすでに述べた. これに対して $\mathfrak{U}^0{}_\nu$ は (29.8) から

$$\mathfrak{U}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathfrak{L}_g{}^*}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}} g^{\rho\sigma}{}_{,\nu} - \delta^\mu_\nu \mathfrak{L}_g{}^* \qquad (30.4)$$

と書き表わされる. ここで

$$\mathfrak{L}_g{}^* = -\frac{1}{2\kappa}\mathfrak{G} = -\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}[\Gamma^\rho_{\mu\nu}\cdot\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\cdot\Gamma^\sigma_{\rho\nu}]$$

である. つまり重力場の Lagrange 関数 $\mathfrak{L}_g{}^*$ から, (26.3) という一般の処方箋にしたがって作った重力場の正準エネルギー・運動量テンソル密度が $\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ である. それゆえ (30.3) であたえられる P_μ は, 物質と重力場とを一緒にした全系のもつ全エネルギー・運動量と考えることができよう.

ところが, $\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ はすぐあとから説明するように, 一般座標変換に対して, テンソル密度の変換性をもたないので, 正しくは**重力場のエネルギー・運動量擬テンソル密度**と呼ばれる.

$\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ が本物のテンソル密度でないことは次のことから容易にわかる. いま, 任意の点 x で測地系を考えよう. そうすると, 点 x ではすべてのアフィン係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は 0 となる. ところで $\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ は, その定義からわかるように $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の 2 次同次式である. したがって, この測地系では $\mathfrak{U}^\mu{}_\lambda$ のすべての成分が点 x において 0 となる. このようなことは本物のテンソル密度では起こりえない. このために $\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ を擬テンソル密度とか, energy-momentum-complex と呼んで本物のテンソル密度と区別する.

$\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ は本物のテンソル密度でないという欠点のほかに, さらに次のような不定性をもっている. すなわち, $\tau^\mu{}_\nu$ はもともと

$$\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma,\nu} = -\partial_\mu \tau^\mu{}_\nu$$

を満足するならば, どんな $\tau^\mu{}_\nu$ でもよかったわけである. (30.4) で定義される $\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ も確かに $\tau^\mu{}_\nu$ に対する 1 つの解ではあるが, たとえば

$$\tau^\mu{}_\nu{}' = \mathfrak{U}^\mu{}_\nu + \partial_\lambda \mathfrak{W}^{\mu\lambda}{}_\nu$$

$$\mathfrak{W}^{\lambda\mu}{}_\nu = -\mathfrak{W}^{\mu\lambda}{}_\nu$$

---

*) P_μ が保存量となるためには, $x^0 =$ 一定としたときに, 空間座標の原点から空間的に十分離れた所で $\mathfrak{T}$ や $\mathfrak{U}$ が 0 となることが必要である. ここではこの条件は成り立っているものとする.

のような解もありうる．ここで $\mathfrak{W}^{\lambda\mu}{}_{\nu}$ は $\lambda\mu$ について，反対称の任意の関数でかまわない．

これらの事実を考えると，重力場のエネルギー・運動量密度という概念が，はたして物理的に意味のあるものか否か疑わしい．しかし，それにもかかわらず，それを積分した P_μ という量にはある程度はっきりした意味がある．そこで，これから P_μ の性質，特に孤立系に対する P_μ についてくわしくしらべてみよう．

そのまえに，ここで**アフィン・ベクトル**とか**アフィン・テンソル**ということばを説明しておくのがつごうがよい．

いま，$a^\mu{}_\nu$ を 4×4 個の任意のパラメーター（したがって x に無関係）として，

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu \cdot x^\nu$$

という1次座標変換を考えよう．ただしここで，上の逆変換は存在するものとする．このような変換の全体を**1次変換群**とか**アフィン変換群**と呼ぶ．Lorentz 群はこのアフィン変換群の部分群で，上の係数 $a^\mu{}_\nu$ に特に

$$\eta_{\mu\rho} a^\mu{}_\nu \cdot a^\rho{}_\sigma = \eta_{\nu\sigma}$$

という条件をつければよい．この条件のために Lorentz 群では $\eta_{\mu\nu} = \pm 1$，または 0 という定数の計量テンソルが存在したが，アフィン変換群のときはこのような定数の計量テンソルは考えられない．

Lorentz 群のときと同じように，アフィン変換に対してもベクトルやテンソルを定義できる．いま，$A^\mu(x)$ が

$$A^\mu(x) \to A^{\mu\prime}(x') = a^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

のとき，この A^μ を**反変アフィン・ベクトル**と呼ぶ．同様に

$$(a^{-1})^\nu{}_\mu \cdot a^\mu{}_\rho = \delta^\nu_\rho$$

$$a^\mu{}_\rho \cdot (a^{-1})^\rho{}_\nu = \delta^\mu_\nu$$

とするとき，

$$B_\nu(x) \to B'_\nu(x') = (a^{-1})^\mu{}_\nu \cdot B_\mu(x)$$

ならば，この $B_\nu(x)$ のことを**共変アフィン・ベクトル**という．この定義からアフィン・テンソルの定義も容易にわかると思う．なお，Lorentz 群のときには

$$(a^{-1})^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} a^\alpha{}_\beta$$

という関係があるが，アフィン変換ではこのような関係は成立しない．

これから孤立系の P_μ について考える．孤立系とは次のような物理系のことである．いま，$x^0 =$ 一定という超曲面を考える．この曲面上の空間座標の原点からこの面上の任意の点までを測地線で結び，その測地線の長さ r を原点からこの点までの距離と定義する．

いま，原点からの距離が $R(=一定)$ という閉曲面(2次元) を考える．物質はすべてこの閉曲面の内側にあるとする．したがってその外では $\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}=0$ である．また，重力場のポテンシャル $g_{\mu\nu}$ については r が十分大きいときに

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+0(1/r), \qquad g_{\mu\nu,\lambda}=0(1/r^2) \tag{30.5}$$

となるような座標系が存在するものとする*)，このような場合に，この体系を **孤立系** と呼ぶ．

このような孤立系の P_μ については次のようなことが成立する．

(**a**) (30.5) が成立する座標系で $x^0=一定$ の面上で P_μ を計算すれば，P_μ は有限の値をもち，しかも $x^0=一定$ の値に無関係である．

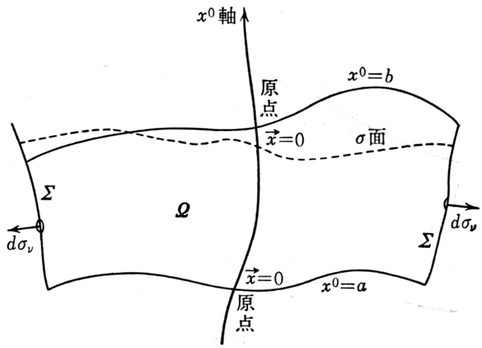
(**b**) 変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime}=f^\mu(x)$$

を考える．ただし，2つの座標系，x-系と x'-系はともに (30.5) の性質をもち，$r\to\infty$ の極限では両系は一致しているものとする．このような座標変換に対しては P_μ の値は不変である．

(**c**) P_μ は共変アフィン・ベクトルである．

まず (**a**) から証明しよう．いま，**第5図** に示されているように，$x^0=a$，および，$x^0=b$ という2つの空間的超曲面と，これらの2枚の曲面を無限の遠方でつないでいる時間的曲面 Σ を考える．これらの曲面でかこまれた4次元的領域を Ω とする．Ω の中で (30.2) を積分すれば，Gauss の定理にしたがって



第 5 図

$$P_\mu(x^0=b)-P_\mu(x^0=a)+\int_\Sigma(\mathfrak{T}^\nu{}_\mu+\mathfrak{U}^\nu{}_\mu)d\sigma_\nu=0 \tag{30.6}$$

という表面積分になる．この第3項は横腹の曲面 Σ の上の積分で，$d\sigma_\nu$ はその面積素片を示す．ところで孤立系であるから，Σ を十分遠方にとればそこではもはや物質は存在

*) $g_{\mu\nu}$ の $0(1/r)$ の項は x^0 に無関係とする．x^0 に関係する項はたかだか $0(1/r^2)$ の中に含まれるものとする．

しないから $\mathfrak{T}^{\nu}{}_{\mu}=0$ である．また，$\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\nu}$ は前にも述べたように $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ の2次式（または $g_{\mu\nu,\lambda}$ の2次同次式）であるから，(30.5) の条件により r が十分大きいところで

$$\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\nu}=0(1/r^4)$$

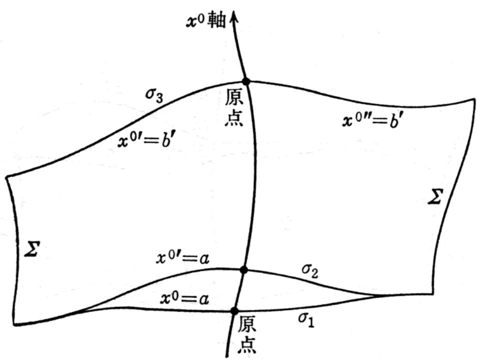
となる．一方，Σ の面積は，$x^0=b$ の面と $x^0=a$ の面の間の時間的間隔が r に比例して増大したとしても，せいぜい Σ は r^3 の程度で $r\to\infty$ と共に増大する．それゆえ，(30.6) の第3積分は $r\to\infty$ で0になってしまう．したがって

$$P_\mu(x^0=b)=P_\mu(x^0=a)=\text{一定}.$$

この一定の値が確かに有限になることはあとで示す．なお，上の証明において $x^0=b$ という超曲面の代わりに，任意の空間的超曲面 σ を考えて上の証明をくり返せば

$$P_\mu(\sigma)\overset{d}{\equiv}\int_{\sigma\text{上}}(\mathfrak{T}^{\nu}{}_{\mu}+\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu})d\sigma_\nu=P_\mu(x^0=a)$$

となる．このことから P_μ の値は空間的超曲面 σ の形や位置によらないことがわかる．



第 6 図

(b) の証明は次のようにすればよい．いま，$x^0=a$ という超曲面を σ_1 とする．いま第2の座標系 x'-系を考える．$x^{0\prime}=a$ という超曲面 σ_2 を考えると，x-系とx'-系とは$r\to\infty$ では一致するから，σ_2 と σ_1 とは $r\to\infty$ では第6図のように一致している．次に第3の超曲面 $\sigma_3(x^{0\prime}=b')$ を考える．ここで，x-系と x'-系とを橋渡しするものとして第3の座標系 x''-系を考える．この x''-系は次のようなぐあいのよい性質をもっているものである．すなわち，まず (30.5) の性質をもっているとする．その上さらに σ_1 上では x-系と x''-系は一致し，$x^{0\prime\prime}=a$ が σ_1 になるとする．また，σ_3 上では x''-系は x'-系と一致し，この面上では $x^{0\prime\prime}=b'$ であるとする．

いま，(a) の証明法を x'-系で用いると

$$P_\mu'(\sigma_2)=P_\mu'(\sigma_3)$$

ところが，σ_3 上では x''-系と x'-系と一致するから

$$P_\mu'(\sigma_3)=P_\mu''(\sigma_3)$$

ここで再び，x''- 系において（a）の証明をくり返すと

$$P_\mu''(\sigma_3)=P_\mu''(\sigma_1)=P_\mu(\sigma_1)$$

この最後の＝は σ_1 上での x-系と x''-系との一致のためである．この結果

$$P_\mu'(\sigma_2)=P_\mu(\sigma_1)$$

最後に（c）の証明にうつる．まず，アフィン係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は 3 階のアフィン・テンソルであることが容易にわかる．したがって，$\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ はアフィン・テンソル密度である．いま，xに無関係な任意の反変アフィン・ベクトル a^ν を考えると

$$\{\mathfrak{T}^\nu{}_\mu(x)+\mathfrak{U}^\nu{}_\mu(x)\}\cdot a^\mu \overset{d}{\equiv} \mathfrak{B}^\nu(x)$$

は反変アフィン・ベクトル密度である．また，a^μ はxに無関係であるから

$$\partial_\nu\mathfrak{B}^\nu=0 \tag{30.7}$$

が成立する．

さて，アフィン変換

$$x^\mu\to x^{\mu\prime}=a^\mu{}_\nu\cdot x^\nu$$

を考えよう．この変換に対して x-系の性質（30.5）は，x'-系にそのままうけつがれる．いま，第5図の $x^0=b$ という曲面の代わりに，空間的超曲面σを考える．ただしこのσは $x^{0\prime}=b'$ で表わされるものとする．そこで，$x^0=a$ の曲面と，Σ および σ でかこまれる領域について（30.7）を積分すれば，（a）の証明と同じ論法で

$$\int_\sigma \mathfrak{B}^\nu d\sigma_\nu=\int \mathfrak{B}^0(\vec{x},x^0=a)d^3x$$

となる．左の積分は面σ上での3次元積分，右は $x^0=a$ という面上での全空間積分である．ところがσの上では，$\mathfrak{B}^\nu\cdot d\sigma_\nu=\mathfrak{B}^{\nu\prime}d\sigma'_\nu=\mathfrak{B}^{0\prime}(x')d\sigma'_0=\mathfrak{B}^{0\prime}(x')d^3x'$ であるあら

$$\int \mathfrak{B}^{0\prime}(\vec{x},\ x^{0\prime}=b')d^3x'=\int \mathfrak{B}^0(\vec{x},x^0=a)d^3x$$

この最後の式はこの積分がアフィン・スカラーであることを示す．そこで，これをSと書くと

$$S=a^\mu\cdot P_\mu(x^0=a)=\text{アフィン・スカラー}$$

a^μ は任意の反変アフィン・ベクトルであるから，P_μ は共変アフィン・ベクトルとなる．

なお，（b）と（c）を一緒にすると次の結論が得られる．いま $x\to x'$ という座標変換は原点の近くでは任意でもかまわないが，rが十分大きい所ではアフィン変換になっているとする．このような変換に対して P_μ はアフィン・ベクトルとして変換される．

さてこれから P_μ を計算しよう．それには $\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ をまず具体的に求めなければならない．

(30.4) からめんどうな計算をすると

$$\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu}=-\frac{1}{2\kappa}\{\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\cdot g^{\rho\sigma})-\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\cdot g^{\nu\rho})\}-\delta^{\nu}_{\mu}\mathfrak{L}_{g}{}^{*} \tag{30.8}$$

となる．この｛　｝の中の g の微分を $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ で示せば $\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu}$ が Γ の2次同次式であることがわかる．しかし，(30.8) は P_{μ} を実際に計算するのには複雑すぎる．そこで (29.16) または (29.17) を利用しよう．

(29.16) を計算するのには次のような量がまず必要である．

$$\mathfrak{D}^{\mu}=\sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda}-g^{\rho\sigma}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\}=\sqrt{-g}\{g^{\mu\rho}{}_{,\rho}-g^{\mu\lambda}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}\}$$

これを使うと，$B^{\mu,\nu}{}_{\alpha}$ は次のように幾分簡単になる．

$$B^{\mu,\nu}{}_{\alpha}=2\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}}g^{\nu\beta}+\delta^{\mu}_{\alpha}\mathfrak{D}^{\nu}-\delta^{\nu}_{\alpha}\mathfrak{D}^{\mu}$$

そこで (29.16) から

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}+\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\nu}=-\frac{1}{2\kappa}\partial_{\lambda}\{B^{\lambda,\mu}{}_{\nu}+\delta^{\mu}_{\nu}\mathfrak{D}^{\lambda}-\delta^{\lambda}_{\nu}\mathfrak{D}^{\mu}\}$$

$$=-\frac{1}{\kappa}\partial_{\lambda}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,\lambda}}g^{\mu\beta}\right\} \tag{30.9}$$

または，(29.17) を使うと*)

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}+\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\nu}=\frac{1}{2\kappa}\partial_{\lambda}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,\mu}}g^{\lambda\beta}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,\lambda}}g^{\mu\beta}+\partial_{\rho}C^{\rho(\mu\lambda)}{}_{\nu}\right\} \tag{30.9$'$}$$

となる．ここで

$$C^{\rho(\mu\lambda)}{}_{\nu}=\sqrt{-g}\left\{\delta^{\rho}_{\nu}g^{\mu\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}g^{\rho\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\nu}g^{\rho\mu}\right\} \tag{30.10}$$

(30.9)′ を使うと

$$P_{\nu}=\frac{1}{2\kappa}\int\sum_{k=1}^{3}\partial_{k}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,0}}g^{k\beta}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,k}}g^{0\beta}\right\}d^{3}x+\frac{1}{2\kappa}\int\partial_{\lambda}\partial_{\rho}C^{\rho(0\lambda)}{}_{\nu}d^{3}x$$

ところで，$C^{\rho(\mu\lambda)}{}_{\nu}$ の満足する恒等式 (29.14) を使うと

$$C^{0(00)}{}_{\nu}=0,\quad C^{k(00)}{}_{\nu}=-2C^{0(k0)}{}_{\nu}$$

そこで，上の第2積分の被積分関数は

$$\partial_{\lambda}\partial_{\rho}C^{\rho(0\lambda)}{}_{\nu}=-\sum_{k=1}^{3}\partial_{k}\left\{\partial_{0}C^{\rho(0k)}{}_{\nu}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\partial_{l}C^{0(kl)}{}_{\nu}\right\}$$

---

*) (30.9)′ の $\partial_{\lambda}\{\cdots\}$ の｛　｝＝｛　｝$^{\lambda\mu}{}_{\nu}$ とおくとき，これを super-potential と呼ぶことがある．

となる.

そこで，Gauss の定理により

$$P_\nu = \frac{1}{2\kappa}\int \sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\rho}{}_{,0}}g^{k\rho} - \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\rho}{}_{,k}}g^{0\rho} - \partial_0 C^{0(0k)}{}_\nu - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\partial_l C^{0(kl)}{}_\nu\right\}d\sigma_k \tag{30.11}$$

となる. ただし

$$d\sigma_1 = dx^2dx^3, \qquad d\sigma_2 = dx^3dx^1, \qquad d\sigma_3 = dx^1dx^2$$

孤立系の場合には (30.5) の性質から (30.11) の積分が有限になることを証明できる. まず，$\mathfrak{G}$ は $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の2次同次式であるから r が十分大のときに

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}} = (\Gamma \text{ の1次式}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\partial_\mu C^{\alpha(\beta\gamma)}{}_\delta = (\partial_\rho g_{\mu\nu} \text{ の1次式}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$d\sigma_k \infty\ r^2$$

したがって孤立系では (30.5) のような座標系で P_μ を計算すれば， 確かに有限の値をもつことがわかる.

ここで，はじめに述べた $\tau^\mu{}_\nu$ または $\mathfrak{u}^\mu{}_\nu$ の不定性について例を示そう. (30.9)′ の代りに

$$(\mathfrak{T}^\mu{}_\nu + \mathfrak{u}^\mu{}_\nu{}') \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2\kappa}\partial_\lambda\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,\mu}}g^{\lambda\beta} - \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\nu\beta}{}_{,\lambda}}g^{\mu\beta}\right\} \tag{30.12}$$

すなわち

$$\mathfrak{u}^\mu{}_\nu{}' = \mathfrak{u}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2\kappa}\partial_\lambda(\partial_\rho C^{\rho(\mu\lambda)}{}_\nu) \tag{30.12$'$}$$

としても， 保存則 (30.3) はなんら影響をうけない. $C^{\rho(\mu\lambda)}{}_\nu$ は恒等式 (29.14) のために

$$\partial_\mu\partial_\lambda\partial_\rho C^{\rho(\mu\lambda)}{}_\nu \equiv 0$$

となるからである.

§ 31. 孤立系の全エネルギー・運動量

これから (30.11) を使って孤立系の全エネルギー・運動量を計算してみよう. それにはまず孤立系の定義 (30.5) をもっと明確にしよう. いま，$r\to\infty$ と共に ds^2 が漸近的に

$$ds^2 \to \left(1+\frac{a}{r}\right)\{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\}-\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 \qquad (31.1)$$

$$r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}, \qquad a=\text{定数}$$

となるような座標系を設置できるとき，この物理系を孤立系と呼ぼう．たとえば，Schwarzschild の解を変形させた (24.14) は $r\to\infty$ で (31.1) と全く一致するから，このような解をもつ系は孤立系である．

(30.11) の好つごうな点は，$r\approx\infty$ の所の $g_{\mu\nu}$ のようすだけを知っていれば，全系のエネルギー・運動量が計算できるということである．すなわち，(31.1) のような $g_{\mu\nu}$ の漸近形だけで P_μ を求めるには十分である．いま，$(1/r)$ の最低次数の項だけを書くと $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は次のようになる*)．

$$\Gamma^k_{mn}\approx\frac{a}{2r^3}\{\delta_{mn}x^k-\delta_{km}x^n-\delta_{nk}\cdot x^m\}=0(1/r^2)$$

$$\Gamma^0_{mn}=\Gamma^k_{0n}\approx 0(1/r^3)$$

$$\Gamma^k_{00}\approx\frac{a}{2r^3}x^k=0(1/r^2)$$

$$\Gamma^0_{0n}\approx\frac{a}{2r^3}x^n=0(1/r^2)$$

$$\Gamma^0_{00}\approx 0(1/r^3).$$

そこで

$$\mathfrak{S}^{0k}{}_\mu\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,0}}g^{k\rho}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,k}}g^{0\rho}\approx-\delta^k_\mu\Gamma^\tau_{0\tau}-\delta^0_\mu\Gamma^\tau_{k\tau}-\frac{1}{2}\delta^k_\mu\Gamma^0_{\rho\sigma}\eta^{\rho\sigma}$$
$$+\frac{1}{2}\delta^0_\mu\eta^{\rho\sigma}\Gamma^k_{\rho\sigma}+\Gamma^0_{\mu k}+\Gamma^k_{\mu 0} \qquad (31.2)$$

この結果にさきに求めた Γ の近似式を代入すると，$(1/r)^2$ 以上は無視して，

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{S}^{0k}{}_l\approx 0\\&\mathfrak{S}^{0k}{}_0\approx\frac{1}{2}\Gamma^k_{00}-\sum_{m=1}^{3}\Gamma^m_{km}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}\Gamma^k_{mm}\approx\frac{2a}{r^3}x^k\end{aligned}\right\} \qquad (31.3)$$

次に $C^{0(kl)}{}_\mu$ を計算しよう．(30.10) および (31.1) の $g_{\mu\nu}$ の形から

$$C^{0(kl)}{}_h\approx 0$$

---

*) ここでローマ字の添字は 1, 2, 3 を示し，ギリシャ字は 0, 1, 2, 3 をとるものとする．

$$C^{0(kl)}{}_0 \approx \sqrt{-g}\, g^{kl}$$

そこで

$$\partial_l C^{0(kl)}{}_0 \approx \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu}\partial_l g_{\mu\nu} g^{kl} + \sqrt{-g}\,\partial_l g^{kl} \approx 0$$

これらを (30.11) に代入すると

$$P_l = (-c)\times(\text{運動量の第 } l\text{-成分}) = 0 \quad l = 1,\ 2,\ 3 \tag{31.4}$$

および*)

$$E = P_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\kappa}\int \sum_{k=1}^{3} \frac{2a}{r^3} x^k \cdot d\sigma_k = \frac{4\pi}{\kappa} a \qquad (31.4)'$$

となる．ここで，$d\sigma_k$ は $(x^k/r)\cdot r^2\cdot \sin\theta\cdot d\theta d\varphi$ である．

さて，$r\approx\infty$ の所では (21.11) でも述べたように，Newton のポテンシャル $\Phi = -Gm/r$ と g_{00} の間には

$$g_{00} \approx -1 - \frac{2}{c^2}\Phi$$

が成り立つ．ここで，Φ の中の m は，遠方から重力場の源の物質をながめたときのその重力質量である．この関係から ((21.12) を参照) (31.1) の中の定数 a は

$$a = \frac{2Gm}{c^2}$$

$\kappa = 8\pi G/c^4$ であるから，(31.4)′ は

$$E = 4\pi\cdot\frac{2Gm}{c^2}\bigg/\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) = mc^2 \tag{31.5}$$

となる．すなわち，孤立系の全エネルギー E は重力質量 m の c^2 倍に等しい．

(31.5) からわかるように，この m は物質の慣性質量だけでなく，それが作る重力場の質量（すなわち，重力場のエネルギーを c^2 で割ったもの）をも一緒にしたものである．このことが § 23 の最後に述べた関係式

$$m < \rho\cdot V$$

の見かけ上の矛盾を説明してくれる．この事情をもう少しくわしく述べるために，§ 23 でとりあげた非圧縮性完全流体の作る重力場についてもう一度 E を計算してみよう．

ところで，(31.5) を出すのに使った (30.11) は，$g_{\mu\nu}$ の漸近形についての知識だけを必要とするものである．したがって，これから考えるような問題，すなわち物質が存在している所での重力場のエネルギーをしらべるのには (30.11) は不適当である．そこで，

---

*) 本書では (18.17) で定義したように $\mathfrak{T}^0{}_0$ がエネルギー密度を示す．それゆえ，P_0 は全系のエネルギー E である．

全エネルギー密度を $\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}$ だけで書き表わす工夫をしてみよう*).

まず，(30.4) の定義から

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}+\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\nu}=\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}+\frac{\partial\mathfrak{L}_g{}^*}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}g^{\rho\sigma}{}_{,\nu}-\delta^{\mu}_{\nu}\mathfrak{L}_g{}^* \tag{31.6}$$

この μ, ν について 0 から 3 まで和をとると，$\mathfrak{L}_g{}^*$ が $g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}$ の 2 次同次式であることから

$$\frac{\partial\mathfrak{L}_g{}^*}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}}g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}=2\mathfrak{L}_g{}^*$$

となるから

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\mu}+\mathfrak{U}^{\mu}{}_{\mu}=\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\mu}+2\mathfrak{L}_g{}^*-4\mathfrak{L}_g{}^*=\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\mu}-2\mathfrak{L}_g{}^*$$

ところで (30.9)′ を使うと，上の左辺は

$$\frac{1}{2\kappa}\partial_{\lambda}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\mu}}g^{\rho\lambda}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\lambda}}g^{\mu\rho}+\partial_{\rho}C^{\rho(\mu\lambda)}{}_{\mu}\right\}$$

となるから，これを上の式に代入して

$$\mathfrak{L}_g{}^*=\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\mu}-\frac{1}{4\kappa}\partial_{\lambda}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\mu}}g^{\lambda\rho}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\lambda}}g^{\mu\rho}+\partial_{\rho}C^{\rho(\mu\lambda)}{}_{\mu}\right\} \tag{31.7}$$

となる．そこで，(31.6) の μ, ν を $\mu=\nu=0$ とおき，この右辺の第 3 項の $\mathfrak{L}_g{}^*$ の代わりに (31.7) を使うと

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^0{}_0+\mathfrak{U}^0{}_0&=\mathfrak{T}^0{}_0+\frac{\partial\mathfrak{L}_g{}^*}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,0}}g^{\rho\sigma}{}_{,0}-\mathfrak{L}_g{}^*\\&=\frac{1}{2}\left(\mathfrak{T}^0{}_0-\sum_{k=1}^{3}\mathfrak{T}^k{}_k\right)+\frac{1}{4\kappa}\partial_{\lambda}\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\mu}}g^{\lambda\rho}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\lambda}}g^{\mu\rho}+\partial_{\rho}C^{\rho(\mu\lambda)}{}_{\mu}\right\}\\&\qquad+\frac{\partial\mathfrak{L}_g{}^*}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,0}}g^{\rho\sigma}{}_{,0}\end{aligned} \tag{31.8}$$

となる．

いままでの計算では別に孤立系の特性をどこにも使ってない．

これから § 23 に述べた場合を考える．したがって，すべての物理量は x^0 に無関係とする．そうするとまず (31.8) の右辺の最後の項は 0 となる．

また，(31.8) の λ については 1 から 3 まで和をとればよい．そこで，Gauss の定理を使って

---

*) ここの計算は Møller の本による．
C. Møller : “The Theory of Relativity”, Oxford University Press, London (1952) 第 XI 章 § 127, (164) 式を参照

$$E=\frac{1}{2}\int(\mathfrak{T}^0{}_0-\sum_{k=1}^{3}\mathfrak{T}^k{}_k)d^3x$$

$$+\frac{1}{4\kappa}\sum_{k=1}^{3}\int\left\{\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\mu}}g^{k\rho}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,k}}g^{\mu\rho}+\sum_{l=1}^{3}\partial_l C^{l(\mu k)}{}_{\mu}\right\}d\sigma_k \qquad (31.9)$$

となる．この右辺の第1積分は，物質の存在する領域，つまり半径 r_0 の球内について積分すればよい．これに対して第2積分は Gauss の定理の結果，半径 r（あとで $r\to\infty$ とする）の球面上の積分となっている．

そこで，この第2積分の被積分関数をしらべてみよう．(31.2) の計算と同じようにして，$r\approx\infty$ のところでは

$$\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,\mu}}g^{k\rho}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\rho}{}_{,k}}g^{\mu\rho}=\frac{2a}{r^3}x^k$$

$$\sum_{l=1}^{3}\partial_l C^{l(\mu k)}{}_{\mu}=0$$

となる．これらを (31.9) に代入すると

$$E=\frac{1}{2}\int(\mathfrak{T}^0{}_0-\sum_{k=1}^{3}\mathfrak{T}^k{}_k)d^3x+\frac{1}{4\kappa}\lim_{r\to\infty}\sum_{k=1}^{3}\int\frac{2a}{r^3}x^k\cdot d\sigma_k$$

この最後の積分は $2\pi a/\kappa$ となり，これは (31.4)′ から $E/2$ に等しい．そこで，上の式は結局

$$E=\int(\mathfrak{T}^0{}_0-\sum_{k=1}^{3}\mathfrak{T}^k{}_k)d^3x \qquad (31.10)$$

となる．

(31.10) は (23.3) を使って

$$m=\frac{E}{c^2}=\int\sqrt{-g_{00}(r)}\cdot\left(\rho+3\frac{p(r)}{c^2}\right)\cdot\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33}}\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi$$

となる．ここで，§ 23 の内部解を使うと

$$\mu(r)\overset{d}{\equiv}\sqrt{-g_{00}(r)}\cdot\left\{\rho+3\frac{p(r)}{c^2}\right\}=\rho\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}<\rho \qquad (31.11)$$

$$dv=\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33}}\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}}r^2\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi\cdot dr$$

となるから

$$m=\int\mu(r)\cdot dv<\rho\int dv=\rho\cdot V \qquad (31.12)$$

（V は物質の総体積）

となる．

(31.11) で定義された $\mu(r)$ は

$$\mu(r)=\frac{1}{c^2}\sqrt{-g_{00}}\cdot(T^0{}_0-\sum_{k=1}^{3}T^k{}_k)$$

であるから，これは

$$x^0\to x^{0\prime}=x^0$$

$$x^k\to x^{k\prime}=f^k(x^1x^2x^3)$$

という変換に対して不変である．あるいは

$$\sqrt{{}^3g}\cdot\mu(r),\qquad \text{ただし}\qquad {}^3g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & \cdot\cdot & \\ g_{31} & \cdot\cdot & g_{33}\end{vmatrix}$$

は上のような空間座標の変換に対してスカラー密度となる．そこでこの $\mu(r)$ は重力場のエネルギーに起因する質量を含めた物質の重力質量密度と考えられる．これは物質だけの慣性質量密度 ρ (＝ここでは r に無関係と仮定されている) と異なり，r に依存し，中心から遠ざかるほど減少していく． このことが一見パラドックスのようにみえる (31.12) の原因である．

なお，§ 30 で述べたように，$\mathfrak{U}^\mu{}_\nu$ の定義には任意性がある． 本書にあたえた (30.4) の定義は Einstein[1] の発見したものである．このほかに Landau-Lifshitz[2] や Møller[3] の定義も有名である．この問題についての統一的研究は Bergmann[4] や Komar[5] によって行なわれた．いずれにしても，重力場のエネルギー密度についてはまだ問題は未解決のまま残されている．

---

1) A. Einstein : S. B. preuss. Akad. Wiss. (1915) p. 778 および Ann. d. Phys **49** (1916) p. 769

2) L. Landau and E. Lifshitz : The Classical Theory of Fields, AddisonWesley, Reading, Mass. (1951) p. 316 (邦訳あり)

3) C. Møller : Ann. Phys. **4** (1958) p. 347

4) P. G. Bergmann : Phys. Rev. **112** (1958) p. 287

5) A. Komar : Phys. Rev. **113** (1959) p. 934

第 VI 章　重　力　波

§ 32.　弱い重力場

重力場の源となる物質から十分に離れたところでは，重力場のポテンシャル $g_{\mu\nu}(x)$ は Minkowski の計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ に大体等しいと考えられる．Einstein の方程式を解いてみればわかるように，$g_{\mu\nu}$ は座標 x の関数であるばかりでなく，Einstein の定数 κ にも関係する．そこで，$g_{\mu\nu}$ を $\sqrt{\kappa}$ についてべき級数に展開する．いま，$\sqrt{\kappa}$ の高次の項を無視して近似的に

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+\sqrt{\kappa}\,h_{\mu\nu}(x) \tag{32.1}$$

とおくとき，$h_{\mu\nu}(x)$ のことを **"線型化された重力場"** (linearized gravitationel field) のポテンシャルという．また，このような近似法が適用できる重力場のことを **"弱い重力場"** という．このような近似法はもちろん座標系の取り方に依存する．つまり，$h_{\mu\nu}(x)$ は一般の座標変換に対してはテンソルではない．しかし，Lorentz 変換に対しては $h_{\mu\nu}$ は共変テンソルであることは容易にわかろう．それゆえ，この § 32 で述べることは Lorentz 変換に対してのみ不変な意味をもつ．

さて，(32.1) に対応して $g^{\mu\nu}$ や $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は $\sqrt{\kappa}$ の 1 次までの近似で

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu}(x)&=\eta^{\mu\nu}-\sqrt{\kappa}\,h^{\mu\nu}\\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\;[h^{\lambda}{}_{\mu,\nu}+h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\mu}-h_{\mu\nu,}{}^{\lambda}] \end{aligned}\right\} \tag{32.2}$$

となる．ここで，添字の上げ下げは

$$h^{\mu}{}_{\nu}=\eta^{\mu\rho}h_{\rho\nu}=h_{\nu}{}^{\mu}$$

$$h^{\mu\nu}=\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\cdot h_{\rho\sigma}=h^{\nu\mu}$$

$$h_{\mu\nu}=\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}$$

のように，常に Minkowski 空間の計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$，$\eta^{\mu\nu}$ によって上下させる．また，微分についても

$$h_{\mu\nu,}{}^{\lambda}=\eta^{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}h_{\mu\nu}=\eta^{\lambda\rho}h_{\mu\nu,\rho}$$

のような記号を使った．

いま，物質場 φ_A が重力場と相互作用している場合を考えよう．この全系の Lagrange

関数は，近似をしないときは

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_M(\varphi_A,\ \nabla_\mu\varphi_A,\ g_{\mu\nu})+\mathfrak{L}_g{}^*$$

である．ここで $\mathfrak{L}_g{}^*$ は(24.6),(24.11)′ にあたえられている．すなわち，

$$\mathfrak{L}_g{}^*=-\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\cdot G=-\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\,[\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\cdot\Gamma^\rho_{\lambda\rho}-\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\cdot\Gamma^\rho_{\nu\lambda}]$$

いま，この Lagrange 関数を $\sqrt{\kappa}$ のべき級数に展開して，$\sqrt{\kappa}$ の２次以上の項を無視することにする．まず $\mathfrak{L}_M$ は次のようになる．

$$\mathfrak{L}_M(\varphi_A,\nabla_\mu\varphi_A,g_{\mu\nu})=\mathfrak{L}_M(\varphi_A,\partial_\mu\varphi_A,\eta_{\mu\nu})+\sqrt{\kappa}\cdot\left(\frac{d\mathfrak{L}_M}{d\sqrt{\kappa}}\right)_{\kappa=0}$$

この第２項は（18.17）を使って

$$\sqrt{\kappa}\cdot\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\right)\cdot\frac{dg_{\mu\nu}(x)}{d\sqrt{\kappa}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\cdot(\mathfrak{T}^{\mu\nu}(x))_{\kappa=0}\cdot h_{\mu\nu}(x)\overset{d}{\equiv}-\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\cdot T^{\mu\nu}\cdot h_{\mu\nu}$$

となる．上の式の最後の $T^{\mu\nu}$ は，物質場の対称エネルギー・運動差テンソル密度の中に含まれている κ を０としたもの，すなわち特殊相対論の場合の対称エネルギー・運動量テンソル密度である．

$\mathfrak{L}_g{}^*$ にも（32.1），（32.2）を代入すると，結局 $\mathfrak{L}$ は近似的に次のようになる．

$$\mathfrak{L}=-\frac{1}{8}[2h_{,\rho}h^{\rho\sigma}{}_{,\sigma}-h_{,}{}^{\rho}h_{,\rho}-2h^{\mu\lambda,\rho}h_{\mu\rho,\lambda}+h^{\mu\lambda,\rho}h_{\mu\lambda,\rho}]$$
$$+\mathfrak{L}_M(\varphi_A,\partial_\mu\varphi_A,\eta_{\mu\nu})-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\cdot T^{\mu\nu}(\varphi)\cdot h_{\mu\nu}\qquad(32.3)$$

ここで，h とは

$$h\overset{d}{\equiv}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

のことである．

この右辺第２項の $\mathfrak{L}_M$ は特殊相対論のときの φ_A の Lagrange 関数である．（32.3）は Minkowski 空間の中にある２種類の場，φ_A と $h_{\mu\nu}$ とが相互作用しているときの Lagrange 関数で，それらの相互作用定数は $\sqrt{\kappa}$ である．

ところで，この相互作用の強さを素粒子同士の間の相互作用の強さと比べてみよう．まず，$\sqrt{\kappa}$ に，Planck の定数を 2π で割った $\hbar$ や，光速度 c，さらに陽子の質量 M_p を適当に掛けて，単位系に無関係なジメンジョンのない数を作ってみる．すぐわかるように

$$\sqrt{\kappa}\cdot\sqrt{\frac{(M_p)^2\cdot c^3}{\hbar}}=3.85\times10^{-19}$$

はジメンジョンのない数である．素粒子論では相互作用定数の２乗をもってその強さの基準とする．そこで重力の場合にも，上の数値を２乗して

$$\kappa \frac{(M_p)^2 \cdot c^3}{\hbar} = 1.48 \times 10^{-37} \tag{32.4}$$

一方，素粒子の相互作用の中で一番弱いものの相互作用定数の 2 乗から，上と同様の手続きで作ったジメンジョンのない数は 10^{-14} 程度のものである．また，荷電素粒子と電磁場の相互作用については $e^2/\hbar c = 1/137 \approx 10^{-2}$ という数が得られる．これらと (32.4) を比べると，重力場との相互作用がいかに小さいものであるかが容易にわかる．したがって，素粒子の世界では重力場との相互作用は普通には無視してよい．

さて，(32.3) から $h_{\alpha\beta}$ について変分をとることにより重力場の方程式が導きだせる．すなわち

$$\frac{1}{2}\{\Box h^{\alpha\beta} + h_{,}{}^{\alpha\beta} - h^{\lambda\alpha,\beta}{}_{\lambda} - h^{\lambda\beta,\alpha}{}_{\lambda} - \eta^{\alpha\beta}(\Box h - h^{\rho\sigma,}{}_{\rho\sigma})\} = \sqrt{\kappa} \cdot T^{\alpha\beta} \tag{32.5}$$

となる．

この方程式は，Einstein の場の方程式 (19.6) に (32.1),(32.2) の近似を適用してももちろん出てくる．

ところでこの式は実は左右両辺が矛盾している．いま，(32.5) の両辺を x^β で微分すると，左辺は恒等的に 0 となる．これはすでに何度も述べた恒等式 (29.9) にほかならない．ところが右辺は 0 とはならない．(32.3) を φ_A について変分をとれば，物質場 φ_A の方程式が得られる．これは (32.3) の最後の項のために重力場と相互作用している．したがって，φ_A のもつエネルギー運動量だけでは保存則は成り立たない．すなわち

$$\partial_\beta T^{\beta\alpha} = (\sqrt{\kappa} \text{ に比例する量})$$

となる．これを，(32.5) の右辺を微分したものに代入すれば，結局右辺は $(\sqrt{\kappa})^2$ に比例した量となる．そこで，もし (32.3) の Lagrange 関数や (32.5) の方程式を近似式と考えないで，$h_{\mu\nu}$ と φ_A との相互作用しているときの厳密な方程式や Lagrange 関数とみなすならば，ここに述べた左右両辺のくいちがいは明らかに矛盾である．しかし，(32.5) は Einstein の方程式を $\sqrt{\kappa}$ の 1 次までにとどめた近似式である．それゆえ，$(\sqrt{\kappa})^2$ に比例する量は近似的に 0 と考えるべきである．このように考えれば上の矛盾は解消する．

さて，$h_{\mu\nu}$ の代わりに

$$\varphi_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{32.6}$$

という量を使うと，(32.5) はつごうのよい形に書き直せる．$\varphi_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ の関係は次のようにも書ける．

$$\varphi \overset{d}{\equiv} \eta^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} = -h, \qquad h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi. \tag{32.6$'$}$$

ここで $\varphi_{\mu\nu}$ に対して*)

$$\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0 \tag{32.7}$$

という束縛条件をつけよう．こうすると（32.5）は

$$\Box\varphi^{\alpha\beta} = 2\sqrt{\kappa}T^{\alpha\beta} \tag{32.8}$$

となる．（32.7）と（32.8）とは一見矛盾しているが，これも $\sqrt{\kappa}^2$ 以上を無視する近似では両者は矛盾しない．すなわち，（32.8）から

$$\Box\partial_\beta\varphi^{\alpha\beta} = 2\sqrt{\kappa}\,\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \{(\sqrt{\kappa})^2 \text{ の項}\}$$

この左辺は（32.7）から 0 となる．一方，右辺は上述の説明から 0 とみなしてよい．

（32.7），（32.8）は 4 元電流密度 j^μ と相互作用している電磁場の方程式（18.8），（18.9）すなわち

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \Box A^\mu = -\mu_0 \cdot j^\mu$$

と大変よく似ている．そこで，次の節でこの類似がどの程度に成り立っているものかくわしくしらべてみよう．

§ 33. 重　力　波

これから物質の存在しない場所における（32.8）の性質をしらべよう． そこでは $T^{\alpha\beta} = 0$ であるから

$$\Box\varphi^{\alpha\beta} = 0 \tag{33.1}$$

また，束縛条件は

$$\partial_\alpha\varphi^{\alpha\beta} = 0 \tag{33.2}$$

$T^{\alpha\beta} = 0$ のときには，（33.1） と（33.2）とは近似的な意味でなく， 厳密に両立する．（33.1）に $\eta_{\alpha\beta}$ を掛けると

$$\Box\varphi = 0 \tag{33.3}$$

となる．したがって

$$\Box h^{\alpha\beta} = \Box\left(\varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\varphi\right) = 0 \tag{33.1$'$}$$

（33.1），（33.1）′ は共に波動方程式と呼ばれるもので， この方程式の解 $\varphi^{\alpha\beta}$ または $h^{\alpha\beta}$

---

*) （32.7）は **De Donder の条件** $\partial_\mu\{\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\} = 0$ を $\sqrt{\kappa}$ の 1 次までの近似で書き直したものにほかならない．この条件はしばしば**座標条件**とも呼ばれる．

は重力場の波動的ふるまいを示す．たとえば，十分遠方にある物体が周期的変化をすると，それのまわりの重力場もこれに伴って周期的変化をするであろう．ちょうど電磁波が真空中を伝わるように，この重力場の周期的変化は中心の物体から遠方に向って伝播していく．物体から十分に離れた場所では“弱い重力場”と考えられ，その伝播のようすは (33.1) または (33.1)′ となる．つまり，電磁波と同様に，光速度 c で Minkowski 空間の中を伝播していく．このような重力場を“**重力波**”という．

重力波の存在は Einstein によってまず指摘された．彼の考えた重力波は前節で述べた方法に基づくもので，いわば近似的なものである．その後，このような $\sqrt{\kappa}$ の第1近似でなくても，Einstein のもとの方程式の厳密解として波動現象を示す解がいろいろ発見された*)．しかし本書では，もっぱら線型近似における重力波 $\varphi_{\mu\nu}$ の性質をくわしくしらべてみよう．

まず，(33.3) が成立しているから，もしある瞬間に，たとえば $x^0=0$ のときに，すべての場所 $\vec{x}$ に対して

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= -h = 0\\ \partial_0\varphi &= -\partial_0 h = 0\end{aligned}\right\}$$

が成立するとすれば，(33.3) のおかげで $\varphi=0$ という条件は任意の時刻 $x^0>0$ に成立する．そこで，これからは次のような束縛条件を満足する波動について考えることにする．すなわち

$$\left.\begin{aligned}\partial_\alpha\varphi^{\alpha\beta} &= 0\\ \varphi = \eta^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{33.4}$$

ところで，もとの Einstein の方程式は一般座標変換に対して共変な形をしている．ここでは特に

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu - \sqrt{\kappa}\cdot\lambda^\mu(x) \tag{33.5}$$

という座標変換を考えることにする．ここで $\lambda^\mu(x)$ は4個の x の任意の関数でよい．しかし，これは Lorentz 変換に対しては反変ベクトルであるとする．この変換に対して $g_{\mu\nu}$ は $\sqrt{\kappa}$ の1次までの近似では，

$$g_{\mu\nu}(x)\to g_{\mu\nu}{}'(x) = g_{\mu\nu}(x) + \sqrt{\kappa}\,(\partial_\mu\lambda^\alpha\cdot g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\lambda^\alpha\cdot g_{\mu\alpha}) + \sqrt{\kappa}\cdot g_{\mu\nu,\alpha}\lambda^\alpha$$

のように変換される．いま，(32.1) にならって

---

*) 重力波についての文献は次の書物にくわしくのっている．
J. Weber : “General Relativity and Gravitational waves” : Interscience Publishers, Inc. New York (1961).

$$g_{\mu\nu}'(x) = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa}\, h_{\mu\nu}'(x) \tag{33.6}$$

とおく．これを上の $g_{\mu\nu}$ の変換式に代入して $\sqrt{\kappa}$ に比例する項を比べると

$$h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}'(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu \tag{33.7}$$

となる．これが一般座標変換に対応する $h_{\mu\nu}$ の変換規則である．これに対して，(32.5) の左辺が不変であることは容易に確かめられる．この不変性は，もとの Einstein の方程式が一般座標変換に対して形を変えないことによるものである．なお，(33.7) は電磁場のゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A_\mu'(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda \tag{33.7$'$}$$

とよく似た形をしているので，(33.7) のことを**重力場のゲージ変換**と呼ぶことにする．

さて，重力波の話をすすめる前に電磁波の場合を振り返ってみよう．真空中での電磁波の方程式は，

$$\Box A^\mu = 0$$

また，Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

がある．この方程式や条件式が，ゲージ変換 (33.7)′ に対して不変であるためには，任意関数 $\lambda(x)$ は

$$\Box \lambda(x) = 0 \tag{33.8}$$

を満足しなければならない．

これと全く同じことが重力波のときにもいえる．ところで重力波を記述するのに２つのテンソル場 $\varphi_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ とを考えた．しかし，ゲージ変換に対しては $h_{\mu\nu}$ の方が $\varphi_{\mu\nu}$ よりも幾分簡単な変換規則にしたがうから，この節では $h_{\mu\nu}$ を使うことにする．

まず，$\varphi_{\mu\nu}$ の満足すべき方程式や条件式を $h_{\mu\nu}$ を使って書き直すと，

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{33.1$'$}$$

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \tag{33.9}$$

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \tag{33.10}$$

となる．これはすべて電磁波の場合の方程式や，Lorentz 条件と全くよく似ている．ただ，(33.10) だけは電磁場のときにはなかったものである．

さて，電磁場の例にならって，上の (33.1)′，(33.9)，(33.10) を不変にするゲージ変換を考えてみよう．まず (33.9) の De Donder の条件が変換に対して変わらないためには

$$\partial_\mu h^{\mu\nu\prime} = \partial_\mu h^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\mu \cdot \lambda^\nu + \partial_\mu \partial^\nu \cdot \lambda^\mu = 0$$

でなければならない．この右辺の第1項は（33.9）から0であるから，結局 λ^μ は

$$\Box \lambda^\nu + \partial^\nu(\partial_\mu \lambda^\mu) = 0 \tag{33.11}$$

を満足すればよい．

次に，もう1つの条件（33.10）は

$$h' = h + 2\partial_\mu \lambda^\mu = 0$$

すなわち

$$\partial_\mu \lambda^\mu = 0 \tag{33.12}$$

が成立する必要がある．これと（33.11）を組み合わせると，

$$\Box \lambda^\nu = 0 \tag{33.13}$$

ならばよい．すなわち，任意の4元ベクトル $\lambda^\nu(x)$ が条件（33.12），（33.13）を満足すれば，ゲージ変換（33.7）に対して（33.1)′～(33.10）は不変となる．

このように重力波と電磁波とは非常によく似た性質をもっている．ただちがう点は，電磁波がベクトル場で表わされることに対して，重力波はテンソル場で記述されるということだけである．電磁場のときになかった条件（33.10），（33.12）は，みなこのことによる．この両者の類似点の中でも，特におもしろいことは，電磁波と同じように重力波も横波だということである．

これを示すのに，方程式（33.1)′ の平面波の解

$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} \cdot e^{ik_\rho x^\rho}, \qquad k_\rho k^\rho = 0 \tag{33.14}$$

を考えてみよう．$a_{\mu\nu}$ は振幅で x には無関係．ここで簡単のために

$$k_1 = k_2 = 0, \qquad k_3 = k^0 = -k_0 = k \tag{33.15}$$

とおく．すなわち，波は z－軸の正の方向に進行するものとする．（33.14），（33.15）を De Donder の条件（33.9）に代入すると

$$k_\mu a^{\mu\nu} = k(a^{3\nu} - a^{0\nu}) = 0$$

となる．すなわち，10 個の振幅 $a_{\mu\nu}$ は全部が1次独立ではなくて，（33.9）のために上のような関係で結ばれる．したがって1次独立な $a_{\mu\nu}$ は

$$a^{00}, \quad a^{01}, \quad a^{02}, \quad a^{11}, \quad a^{12}, \quad a^{22} \tag{33.16}$$

の6個である．残りのものは次のように上の6個で示される．

$$a^{03} = a^{00}, \quad a^{13} = a^{10}, \quad a^{23} = a^{20}, \quad a^{33} = a^{30} = a^{00} \qquad (33.16)'$$

次に，もう1つの束縛条件（33.10）から

$$\eta_{\mu\nu} a^{\mu\nu} = -a^{00} + a^{11} + a^{22} + a^{33} = 0$$

あるいは，さきに求めた $a^{33}=a^{00}$ の関係を使うと

$$a^{11}+a^{22}=0 \tag{33.17}$$

となる．それゆえ，ほんとうに独立なものは（33.16）の中で a^{22} をはずした残りの5個である．

そこで，これから変換（33.7）を考えよう．まず，$\lambda^{\mu}(x)$ は（33.13）の条件を満足しなければならないから

$$\lambda^{\nu}(x)=\lambda^{\nu}\cdot e^{i(k_{\mu}x^{\mu})},\quad k_{\mu}k^{\mu}=0$$

とおくことができる．右辺の λ^{ν} は x に無関係，また k_{μ} は（33.15）であたえられるものとする．さらに，（33.12）の条件から振幅 λ^{ν} は

$$k_{\mu}\lambda^{\mu}=k(\lambda^{3}-\lambda^{0})=0 \tag{33.18}$$

という制限をもつ．そこで，（33.18）を満足する λ^{ν} を用いてゲージ変換（33.7）を行なっても，（33.16)′ や（33.17）という $a_{\mu\nu}$ の間に成り立つ関係式はそのまま成立する．なぜかといえば，このようなゲージ変換は（33.9）や（33.10）の条件を破壊しないからである．

さて，k_{μ} の0でない成分は k_3 と k_0 だけであるということから，ゲージ変換をしても a_{11}, a_{12}, a_{22} は変化しないことは，すぐにわかるであろう．しかし，添字の0か3がつくものは変換をうける．たとえば，

$$a_{00}\rightarrow a_{00}'=a_{00}+2ik_{0}\lambda_{0}$$

$$a_{0j}\rightarrow a_{0j}'=a_{0j}+ik_{0}\lambda_{j}\quad j=1,2$$

そこで，λ^{ν} を適当にとると a_{00}', a_{01}', a_{02}' を消去できる．たとえば，

$$a_{00}'=a_{00}-2ik\lambda_{0}=0$$

とするには

$$\lambda_{0}=-i\frac{a_{00}}{2k}=-\lambda^{0}=-\lambda^{3}$$

とすればよい．また

$$a_{0j}'=a_{0j}-ik\lambda_{j}=0$$

から

$$\lambda^{j}=\lambda_{j}=-i\cdot a_{0j}/k\quad j=1,2$$

となる．このような λ^{μ} を使ってゲージ変換（33.7）を行なえば，結局あとに残るものは

$$a_{11}(=-a_{22}),\qquad a_{12}(=a_{21})$$

の2個の独立成分だけとなる．そこで波動解は次の2個だけである

$$a_{11}e^{ik(z-x^0)},\qquad a_{12}e^{ik(z-x^0)} \tag{33.19}$$

これらはゲージ変換（33.7）に対しても不変である．すなわち，電磁波の横波成分と同じように，上の2個の解だけが物理的に意味のあるものである．10 個の $h_{\mu\nu}$ の中で a_{11} $(=-a_{22})$，$a_{12}(=a_{21})$ 以外のものは，（33.7）の変換によってその値を0にもできるし，他の任意の値にすることもできるから，これらは物理的に無意味な，いわば見かけの成分にすぎない．なお上の解の添字からわかるように，（33.19）の振幅は波の進行方向，すなわち第3軸に直角な成分である．つまり重力波も横波である．

ここで解（33.19）の性質をもう少しくわしく調べるために，いま z－軸のまわりに座標系を θ だけ回転させてみよう．そうすると，任意の1点の新旧座標を $(x^\mu)'$,(x^μ) とすると，これらの間には次の関係が成り立つ．

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= (x^1)'\cos\theta - (x^2)'\sin\theta \quad x^0 = (x^0)' \\ x^2 &= (x^1)'\sin\theta + (x^2)'\cos\theta \quad x^3 = (x^3)' \end{aligned}\right\} \tag{33.20}$$

いま，（33.19）の代わりにこれらの1次結合

$$\left.\begin{aligned} h^{(+)}(x) &= (a_{11} - ia_{12})e^{ik(z-x^0)} \\ h^{(-)}(x) &= (a_{11} + ia_{12})e^{ik(z-x^0)} \end{aligned}\right\} \tag{33.19$'$}$$

を考えよう．この $h^{(\pm)}$ は上の回転に応じて

$$\left.\begin{aligned} h^{(+)\prime}(x) &= e^{+2i\theta}h^{(+)}(x) \\ h^{(-)\prime}(x) &= e^{-2i\theta}h^{(-)}(x) \end{aligned}\right\} \tag{33.21}$$

となる．（33.21）を導くのには，a_{kl} の変換規則

$$a_{kl}' = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{l'}}a_{\mu\nu}$$

に（33.20）を代入すればよい．

電磁場のときもこれと同じことを考えてみよう．いま，平面波の解を

$$A_\mu(x) = a_\mu e^{ik_\nu x^\nu} \quad k_\nu k^\nu = 0$$

とする．k_ν は（33.15）であたえられているものである．そうすると（33.19）′ に対応して

$$a^{(\pm)}(x) = (a_1 \mp ia_2)e^{ik(z-x^0)} \text{（複号同順）}$$

とおけば，これらは回転（33.20）に対して

$$a^{\pm}(x) \to a^{\pm}(x)' = e^{\pm i\theta}a^{(\pm)}(x) \tag{33.22}$$

となる．

（33.21）と（33.22）との違いは，重力の場合には2階のテンソルであるために，右辺

に $\exp(\pm 2i\theta)$ という因数がでるが，電磁場は1階のテンソルつまりベクトルであるために $\exp(\pm i\theta)$ となる．exp の中にでる数字がそれぞれ1および2であることは，量子力学的にいえば光子のスピンが1，重力量子のスピンは2ということを示す．この事情をもっと一般的に研究したものが Fierz および Pauli の論文である*)．

§34. 重力波の放射

いま，物質から重力波が放射される問題を考えよう．それには，(32.8) すなわち

$$\Box\varphi^{\mu\nu}=2\sqrt{\kappa}\,T^{\mu\nu} \tag{34.1}$$

を積分すればよい．ここで考えている近似では

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{34.2}$$

とする．このおかげで，条件

$$\partial_\mu\varphi^{\mu\nu}=0 \tag{34.3}$$

は (34.1) と矛盾しないことになる．

さて

$$\Box G(x)=\delta^4(x)\overset{d}{\equiv}\delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$$

$$G(x)=0\quad(x^0<0\ のとき)$$

の解 $G(x)$ を**遅滞グリーン関数** (retarded Green's function) という．

これは $x^0>0$ に対して

$$G(x)=-\frac{1}{4\pi r}\delta(r-x^0)$$

$$r=|\vec{x}|$$

これを使うと (34.1) の解は

$$\varphi^{\mu\nu}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi}\int\frac{T^{\mu\nu}\{\vec{x}',(x^0)'=x^0-|\vec{x}-\vec{x}'|\}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \tag{34.4}$$

となる．これは電磁場の遅滞ポテンシャルと全く同じ形をしている．

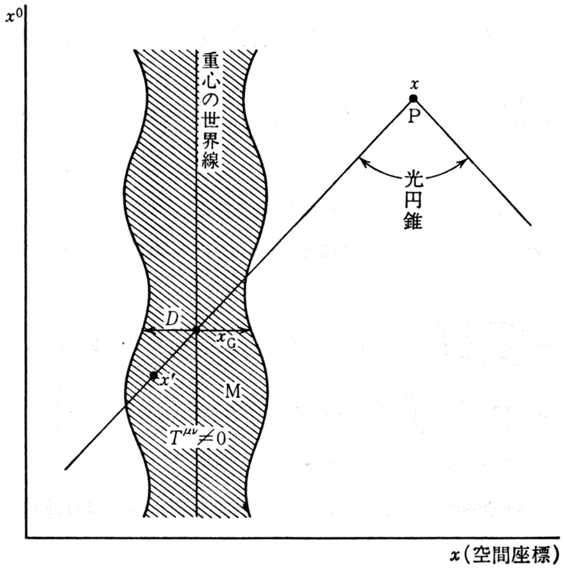
さて**第7図**において1点P（その座標を x）における $\varphi^{\mu\nu}$ の値を考えてみよう．いま，図の斜線で塗った部分を M として，M の外側では $T^{\mu\nu}=0$ とする．そうすると (34.4) の積分にきく点 x' は，P を頂点とした光円錐（過去の方にひらいた円錐）と M との交わった部分にある．

しかし，もし M の幅 D に比べて点 P が十分遠方にあり，また重力波の波長 λ と D

---

*) M. Fierz and W. Pauli : Proc. Roy. Soc. (London) **173** (1939) p. 211

と比べるとき，$\lambda \gg D$ ならば (34.4) をもっと計算しやすい形に書き直すことができる．その方法は，電磁波の放射を扱う際に，双極放射による電磁波，4 極放射による電磁波…等々の和に展開するやり方と同じものである．



第 7 図

まず，物質系の重心Gの 4 次元的軌跡，つまり世界線を考えよう．この世界線が第 7 図の点Pを頂点として作った光円錐をつらぬく点の位置を $\vec{x}_G$，その時刻を $x^0{}_G$ とする．いま

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_G, \qquad \vec{r}\,' = \vec{x}\,' - \vec{x}_G$$

とおく．上の定義から

$$x^0{}_G = x^0 - |\vec{x} - \vec{x}_G| = x^0 - r$$

という関係があることはすぐにわかる．

さて，(34.4) の分母から考えよう．

$$|\vec{x} - \vec{x}\,'| = |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 - 2(\vec{r}\vec{r}\,') + (r')^2}$$

$$= r\left[1 - \frac{(\vec{r}\vec{r}\,')}{r^2} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{(\vec{r}\vec{r}\,')^2}{r^4}\right\} + \cdots\right] \qquad (34.5)$$

また，被積分関数の中にある $T^{\mu\nu}(x')$ は，(34.5) を使って

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}\,',\ x^0 - |\vec{x} - \vec{x}\,'|)$$

$$= T^{\mu\nu}\left(\vec{x}', x^0 - r + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r} - \frac{(r')^2}{2r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{2r^3}\cdots\right)$$

これを時刻 $x^0{}_{\mathrm{G}} = x^0 - r$ のところで時間変数について Taylor 展開して

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|) = T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_{\mathrm{G}})$$
$$+ \left\{\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r} - \frac{(r')^2}{2r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{2r^3}\cdots\right\}\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_{\mathrm{G}}) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r} - \frac{(r')^2}{2r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{2r^3}\cdots\right\}^2 \partial_0\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_{\mathrm{G}}) + \cdots \qquad (34.6)$$

ところで，仮定から

$$r \gg D \gtrsim r'$$

であるから，$(1/r)$ の最低次の項だけにとどめると，(34.5) (34.6) を (34.4) に代入すれば

$$\varphi^{\mu\nu}(x) = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi}\left[\frac{1}{r}\int T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x' + \sum_{i=1}^{3}\frac{r^i}{r^2}\int r^{i\prime}\cdot\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x'\right.$$
$$\left. + \sum_{i\cdot k=1}^{3}\frac{r^i r^k}{2r^3}\int r^{i\prime}\cdot r^{k\prime}\cdot\partial_0\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x' + \cdots\right] \qquad (34.7)$$

となる*⁾．ここで ∂_0 は $x^0{}_{\mathrm{G}}$ についての微分を示す．

(34.7) はさらに物理的解釈のしやすい形に変形できる．いまわれわれが考えている近似では

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad (34.2)$$

が成立する．そこで，ν の代わりに $k(=1, 2, 3)$ とおいてみる**⁾．そうすると

$$\partial_0 T^{0k} = -\sum_{l=1}^{3}\partial_l T^{lk}$$

これの両辺に x^i を掛けて，それを 3 次元空間全体にわたって積分すると ($x^0 =$ 一定としておく)

$$\partial_0\int_{-\infty}^{\infty} x^i T^{0k}\,d^3x = -\sum_{l=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty} x^i\partial_l T^{lk}\,d^3x$$

部分積分して Gauss の定理を使うと，右辺は

---

*⁾ φ, $T^{\mu\nu}$ の振動数を ω とすれば，(34.7) の時間微分を 1 回行なうごとに ω/c という因数が出る．そこで，(34.7) の展開は $r'\dfrac{\omega}{c} = r'/\lambda$ のべき展開と同じことである．λ は φ の波長である．$r'/\lambda \lesssim D/\lambda \ll 1$ と仮定してあるから，実際の計算でははじめの項だけを考えればよい．

**⁾ ギリシャ文字の添字，λ, μ, ν 等はすべて $0, \ldots, 3$ の値をとるが，ラテン字の添字は 1, 2, 3 つまり空間成分だけを示すものとする．

$$-\sum_{l=1}^{3}\int(x^iT^{lk})\,d\sigma_l+\sum_{l=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_l x^i\cdot T^{lk}\,d^3x$$

この第1項は3次元全空間を包む無限に大きな閉曲面上の積分で，$d\sigma_l$ はその面積素片である．ところで，$T^{\mu\nu}\neq 0$ となるのは M の中だけ（第7図）であるから，もちろんこの表面積分は0となる．そこで，結局

$$\partial_0\int_{-\infty}^{\infty}x^iT^{0k}\,d^3x=\int_{-\infty}^{\infty}T^{ik}(x)\,d^3x \tag{34.8}$$

$T^{ik}=T^{ki}$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}T^{ik}(x)=\frac{1}{2}\partial_0\int_{-\infty}^{\infty}(x^iT^{0k}+x^kT^{0i})\,d^3x \tag{34.8$'$}$$

次に，(34.2) の $\nu=0$ とおいて，この両辺に x^ix^k を掛けて，再び前と同じように3次元全空間にわたって積分すると，

$$\partial_0\int_{-\infty}^{\infty}x^ix^kT^{00}\,d^3x=-\sum_{l=1}^{3}\int x^ix^k\partial_lT^{l0}\,d^3x$$

この右辺は，前と同じ考え方から

$$=-\sum_{l=1}^{3}\int x^ix^kT^{l0}\,d\sigma_l+\int_{-\infty}^{\infty}(x^kT^{i0}+x^iT^{k0})\,d^3x$$

この第1項は前と同じ理由から0となる．これを (34.8)$'$ と組み合わせると

$$\int_{-\infty}^{\infty}T^{ik}(x)\,d^3x=\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\int_{-\infty}^{\infty}x^ix^kT^{00}(x)\,d^3x \tag{34.9}$$

もし (34.2) の $\nu=0$ としたものに，x^i を掛けて上と同じ議論をくり返せば

$$\int_{-\infty}^{\infty}T^{0i}\,d^3x=\partial_0\int_{-\infty}^{\infty}x^iT^{00}\,d^3x \tag{34.10}$$

が得られる．

以上の結果を (34.7) に代入すると

$$\varphi^{ik}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{4\pi r}\partial_0\partial_0\int x^{i\prime}\cdot x^{k\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x'+\cdots \tag{34.11}$$

$$\varphi^{0k}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\Big[\partial_0\int x^{k\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\mathrm{G}})\cdot d^3x'$$
$$+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\int r^{l\prime}\cdot\partial_0T^{0k}(\vec{x}',\,x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x'+\cdots\Big] \tag{34.12}$$

(34.12) の第2項の積分は (34.9) を使うと次のようになる．

$$\int r^{l\prime}\cdot\partial_0T^{0k}(\vec{x}',\,x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x'=-\int r^{l\prime}\cdot\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^{m\prime}}T^{mk}(\vec{x}',\,x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x'$$
$$=\int T^{lk}\,d^3x'=\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\int x^{l\prime}\cdot x^{k\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\mathrm{G}})\,d^3x'$$

そこで (34.12) は次のように書きかえられる.

$$\varphi^{0k}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\Big[\partial_0\int x^{k\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\rm G})\,d^3x'$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\cdot\partial_0\partial_0\int x^{l\prime}\cdot x^{k\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',\ x^0{}_{\rm G})\,d^3x'+\cdots\Big] \qquad (34,12)'$$

全く同じようにして

$$\varphi^{00}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\Big[\int T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\rm G})\,d^3x'+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\cdot\partial_0\int x^{l\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\rm G})\,d^3x'$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{3}\frac{r^jr^l}{r_2}\partial_0\partial_0\int x^{j\prime}\cdot x^{l\prime}\cdot T^{00}(\vec{x}',x^0{}_{\rm G})\,d^3x+\cdots\Big] \qquad (34.13)$$

(34.11)～(34.13) では，$\varphi^{\mu\nu}$ はすべて T^{00} だけで書き表わされている．ところで，$T^0{}_0=-T^{00}$ は $c^2\times$(質量密度) であるから，(34.11)～(34.13) の式は次のように解釈できる．まず，φ^{ik} は質量の4極子モーメントの時間についての2階微分に比例する．これに対して φ^{0k} では，多極放射による波に分解したときに，最低次のものは双極放射による波である．また，φ^{00} では第1項は Newton ポテンシャルの型をしている (ただし遅滞効果をいれてある)．第2項は双極子モーメントの時間微分に比例し，第3項ではじめて4極子モーメントが出てくる．

ところで，次の節で具体的に示すように，重力波が運び去るエネルギーを計算するときは，φ^{00} や φ^{0k} に含まれる双極放射の項や Newton 型のポテンシャルはエネルギーの運搬には役立たないことがわかる．それゆえ，無限の遠方までエネルギーを運搬していける重力波は4極放射またはこれより高次の多極放射による波である．このことは電磁波のときと違う点である．電磁波のときは最低次の波は双極放射による波である．このちがいの原因は，電磁波が保存則を満足するベクトル，すなわち4元電流密度 j^μ から放射されるのに対して，重力波は保存則を満足する2階のテンソル $T^{\mu\nu}$ から放射されるということである．

§ 35. 調和振動子からの重力波放射

重力波 $\varphi^{\mu\nu}$ を計算するのには，その源の物質系の $T^{00}(x)$ がわかっていればよい．そこでいま N 個の質点系を考えよう．その第 a 番目の質点の質量を $m_a\,(a=1,\cdots,N)$ またその4次元座標を $\xi^\mu{}_a\,(a=1,\cdots,N)$ とする．$T^0{}_0(x)$ は場所 $\vec{x}$ における時刻 x^0 のときのエネルギー密度を示す．ところで各質点の速度はすべて c に比べて無視できるほど小さいとする．また質点同士の間の相互作用エネルギーも，各質点の静止エネルギーの

和に比べれば無視できるとする．そうすると，$T^0{}_0$ は近似的に静止エネルギー密度に等しく，

$$T^{00}(\vec{x},t)=-T^0{}_0(\vec{x},t)=-\sum_{a=1}^{N} m_a\cdot c^2\cdot\delta(\vec{x}-\vec{\xi}_a(t)) \tag{35.1}$$

とおくことができる．

（35.1）を（34.11）に代入すると，4極放射以上は無視して

$$\varphi^{ik}(\vec{x},t)=\frac{\sqrt{\kappa}}{4\pi r}\frac{d^2}{dt_G{}^2}\left\{\sum_{a=1}^{N} m_a\xi^i{}_a(t_G)\xi^k{}_a(t_G)\right\} \tag{35.2}$$

となる．ここで，重心 $\vec{x}_G$，時刻 t_G，および r は

$$\vec{x}_G(t_G)=\sum_{a=1}^{N} m_a\vec{\xi}_a(t_G)\Big/\sum_{b=1}^{N} m_b$$

$$t_G=t-r/c,\qquad r=|\vec{x}-\vec{x}_G(t_G)|$$

であたえられる．

（35.1）を（34.12）′ に代入すれば，上と同じ近似で

$$\varphi^{0k}(\vec{x},t)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}c\cdot\sum_{a=1}^{N} m_a\frac{d\xi^k{}_a(t_G)}{dt_G}+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\cdot\varphi^{lk}(\vec{x},t)$$

この右辺の第1項の $\sum\limits_a$ は，物質系の時刻 t_G における全運動量を示す．すなわち

$$P^k(t_G)=\sum_{a=1}^{N} m_a\cdot\frac{d}{dt_G}\xi^k{}_a(t_G)$$

ところで，いまわれわれが考えている近似では，$T^{\mu\nu}$ は保存則

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$$

を満足するから，P^k は時間に無関係な定数となる．そこで

$$\varphi^{0k}(\vec{x},t)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}cP^k+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\varphi^{lk}(\vec{x},t) \tag{35.3}$$

最後に，（34.13）からは

$$\varphi^{00}(\vec{x},t)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\left[\sum_{a=1}^{N} m_ac^2+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}c\cdot\sum_{a=1}^{N} m_a\frac{d\xi^l{}_a(t_G)}{dt_G}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{j\cdot l=1}^{3}\frac{r^j\cdot r^l}{r^2}\left(\frac{d}{dt_G}\right)^2\sum_{a=1}^{N} m_a\cdot\xi^j{}_a(t_G)\cdot\xi^l{}_a(t_G)\right]$$

この右辺の第2，第3項は（35.2），（35.3）を使って書きなおせば，次のようになる．

$$\varphi^{00}(\vec{x},t)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\sum_{a=1}^{N} m_ac^2+\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r^2}c\cdot\sum_{k=1}^{3} r^k\cdot P^k\cdot+\sum_{l\cdot k=1}^{3}\frac{r^l\cdot r^k}{r^2}\cdot\varphi^{lk}(\vec{x},t)$$

$$= \frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r} \sum_{a=1}^{N} m_a \cdot c^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{r^k}{r} \cdot \varphi^{0k}(\vec{x}, t) \tag{35.4}$$

となる．

ここで話を簡単にするために，重心が，原点に常に静止している場合を考えよう．すなわち，任意の時刻において

$$\vec{x}_G = \sum_{a=1}^{N} m_a \xi_a / \sum_a m_b = 0, \qquad r = \vec{x} - \vec{x}_G = \vec{x}$$

このようなことは，適当に Lorentz 変換を行なえば常に実現させることができる．ところで，上の式を t_G で微分すれば，

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d\xi_a}{dt_G} = \left(\sum_{b=1}^{N} m_b\right) \cdot \frac{dx_G}{dt_G} = 0$$

そこで，φ^{0k}, φ^{00} は

$$\varphi^{0k}(\vec{x}, t) = \sum_{l=1}^{3} \frac{x^l}{r} \cdot \varphi^{lk}(\vec{x}, t) \tag{35.3$'$}$$

$$\varphi^{00}(\vec{x}, t) = \frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r} \sum_{a=1}^{N} m_a c^2 + \sum_{i \cdot k=1}^{3} \frac{x^i x^k}{r^2} \varphi^{ik}(\vec{x}, t) \tag{35.4$'$}$$

となる．

ここで，さらに話を具体的にして，質量が共に m である 2 個の質点を考えよう．これらの質点は

$$\vec{\xi}_1(t) = \vec{A} \cos \frac{\omega}{2} t, \qquad \vec{\xi}_2(t) = -\vec{A} \cos \frac{\omega}{2} t \tag{35.5}$$

という運動をするものとする．ここで，振幅のベクトル $\vec{A}$ は z-軸の方向にあるものとする．つまり，$A_x = A_y = 0$, $A_z = A$ とする．明らかにこの系の重心は原点に静止している．また，この $T^{00}(x)$ は

$$T^{00}(\vec{x}, t) = -mc^2 \delta(x) \cdot \delta(y) \left[\delta\left(z - A \cos \frac{\omega}{2} t\right) + \delta\left(z + A \cos \frac{\omega}{2} t\right)\right] \tag{35.6}$$

となる．

(35.5) から 0 でない φ^{ik} は φ^{33} だけであることがわかる．ところで，この質点系の慣性能率の 1 周期についての時間平均を I とすると，

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{a=1}^{2} m_a (\vec{\xi}_a)^2 dt = mA^2 \qquad T = \frac{2\pi}{(\omega/2)}$$

この I を使って $\varphi^{\mu\nu}$ を書くと，0 でないものは

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^{33}(\vec{x},t) &= -\frac{I\sqrt{\kappa}}{4\pi r}\cdot\omega^2\cdot\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\\
\varphi^{03}(\vec{x},t) &= \cos\theta\cdot\varphi^{33}(\vec{x},t)\\
\varphi^{00}(\vec{x},t) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\cdot 2mc^2+\cos^2\theta\cdot\varphi^{33}(\vec{x},t)
\end{aligned}\right\}\qquad(35.7)$$

となる．ここで

$$x=r\sin\theta\cdot\cos\phi,\quad y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi,\quad z=r\cdot\cos\theta$$

とした．(35.7) でおもしろいことは，質点系は振動数 $\omega/2$ で振動しているが，それから放射される重力波の振動数は ω であるということである．これは 4 極放射の特徴である．

これから重力波によって無限遠方に運び去られるエネルギーを計算してみよう．それにはまず，重力場のエネルギー・運動量テンソル密度を計算しなければならない．(30.8)にあたえられた擬テンソル密度

$$\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu}=-\frac{1}{2\kappa}\left[\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\,\partial_\mu(\sqrt{-g}\cdot g^{\rho\sigma})-\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\partial_\mu(\sqrt{-g}\cdot g^{\nu\rho})\right]-\partial^{\nu}_{\mu}\mathfrak{L}_g{}^*$$

は，いまわれわれが考えている近似では次のようになる．すなわち

$$\left.\begin{aligned}
\partial_\mu(\sqrt{-g}\cdot g^{\rho\sigma}) &= -\sqrt{\kappa}\cdot\partial_\mu\varphi^{\rho\sigma}\\
\partial_\mu\varphi^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}\right\}\qquad(35.8)$$

という関係を使うと，

$$\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu}=\frac{1}{8}[4\,\varphi^{\nu}{}_{\rho,\sigma}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,\mu}-2\varphi^{\rho\sigma,\nu}\varphi_{\rho\sigma,\mu}+\varphi_{,}{}^{\nu}\varphi_{,\mu}$$

$$+\delta^{\nu}_{\mu}\{\varphi^{\alpha\beta,\lambda}\varphi_{\alpha\beta,\lambda}-\frac{1}{2}\varphi_{,}{}^{\rho}\varphi_{,\rho}-2\varphi^{\alpha\beta,\lambda}\varphi_{\alpha\lambda,\beta}\}]\qquad(35.9)$$

ところで § 30 でも述べたように，重力場のエネルギー・運動量テンソル密度はその形式に任意性がある．たとえば，上に求めた $\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu}$ の第 1 項と最後の項だけをとりだし，これに微分 ∂_ν を行なうと

$$\frac{1}{8}\partial_\nu[4\,\varphi^{\nu}{}_{\rho,\sigma}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,\mu}-2\varphi^{\alpha\beta,\lambda}\varphi_{\alpha\lambda,\beta}\delta^{\nu}_{\mu}]$$

$$=\frac{1}{2}\varphi^{\nu}{}_{\rho,\sigma\nu}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,\mu}+\frac{1}{2}\varphi^{\nu}{}_{\rho,\sigma}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,\nu\mu}-\frac{4}{8}\cdot\varphi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu}\varphi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\beta}$$

この第 1 項は条件 (35,8) から 0 となる．第 2，第 3 項は相殺する．それゆえ $\mathfrak{U}^{\nu}{}_{\mu}$ の第 1 項と最後の項は，場の方程式を用いなくてもその 4 次元 divergence $\partial_\nu[\quad]$ は 0 となる．そこで，これをとりのぞいた残り，すなわち

$$U^{\nu}{}_{\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{8}[-2\,\varphi^{\rho\sigma,\nu}\varphi_{\rho\sigma,\mu}+\varphi_{,}{}^{\nu}\varphi_{,\mu}+\delta^{\nu}_{\mu}\{\varphi^{\alpha\beta,\lambda}\varphi_{\alpha\beta,\lambda}-\frac{1}{2}\varphi_{,}{}^{\lambda}\varphi_{,\lambda}\}]\qquad(35.9)'$$

を重力場のエネルギー・運動量テンソル密度と定義する．(35.9) の代わりに (35.9)′ を用いても，上の説明から

$$\partial_\nu\{T^\nu{}_\mu + U^\nu{}_\mu\} = 0 \tag{35.10}$$

が成立することは容易にわかるであろう*⁾.

いま (35.10) で $\mu=0$ とおいて，ある時刻に全空間にわたってこれを積分してみよう．そうすると

$$\partial_0\int T^0{}_0\,d^3x = -\partial_0\int U^0{}_0\,d^3x - \sum_{l=1}^{3}\int\partial_l T^l{}_0\,d^3x - \sum_{l=1}^{3}\int\partial_l U^l{}_0\,d^3x$$

この右辺の第 2，第 3 項は Gauss の定理によって表面積分に書き直される．ところで，物質場は第 7 図に示されているように，ある限られた領域の中でだけその $T^\mu{}_\nu \neq 0$ とする．そうすると，無限の遠方における表面上での積分

$$\int T^l{}_0\,d\sigma_l \to 0$$

となる．したがって

$$\partial_0\int T^0{}_0\,d^3x = -\partial_0\int U^0{}_0\,d^3x - \sum_{l=1}^{3}\int U^l{}_0\,d\sigma_l$$

この右辺の最後の項の $d\sigma_l$ は座標原点を中心として，半径が十分に大きな球面上の面積素片（外向）と思えばよい．

ところで，物質から放射された重力波は周期 $T=2\pi/\omega$ で振動している．それゆえ，上の両辺を時間 x^0 について 1 周期にわたって積分（たとえば $x^0=a$ から $x^0=a+cT$ まで）すれば，

$$\left(\int T^0{}_0\,d^3x\right)_{x^0=a+c.T} - \left(\int T^0{}_0\,d^3x\right)_{x^0=a}$$
$$= -\left(\int U^0{}_0\,d^3x\right)_{x^0=a+cT} + \left(\int U^0{}_0\,d^3x\right)_{x^0=a} - \int_a^{a+cT} dx^0\cdot\sum_{l=1}^{3}\int U^l{}_0\,d\sigma_l$$

となる．この右辺の第 1，第 2 項は重力場が周期運動をしていることから相殺して 0 となる．したがって

---

*⁾ (35.10) と (34.2) は矛盾しているわけではない．(34.2) は正確に場の方程式を使って計算すれば，§ 32 で述べたように $\sqrt{\kappa}$ に比例する量となり，0 ではない．(35.10) は $\sqrt{\kappa}$ までの近似で確かに 0 となる．つまり，(34.2) より (35.10) の方がより以上に正確な式である．

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_0\, d^3x\right)_{x^0=a} - \left(\int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_0\, d^3x\right)_{x^0=a+cT} = \int_a^{a+cT} dx^0 \cdot \sum_{l=1}^{3} \int U^l{}_0\, d\sigma_l \tag{35.11}$$

この左辺は，1周期 $T=2\pi/\omega$ の間に物質場が失うエネルギーを示す．また，右辺は重力波のエネルギーの流れ $U^l{}_0$ として，無限遠方の表面から1周期の間に逃げていくエネルギーを示す．この $U^l{}_0$ に (35.9)′ を代入し，$\varphi^{\mu\nu}$ には (35.7) を代入すれば実際にエネルギーの失われる割合が計算できる．

この計算を具体的にやる前に1つ注意をしておこう．(35.11) の左辺の $T^0{}_0$ に (35.1) を代入すると左辺は0となってしまう．一方，右辺はこれから計算すればわかるように0でない値をもつ．この矛盾は (35.1) であたえられる $T^0{}_0$ が近似的なものだからである．(35.11) の左辺の $T^0{}_0$ には，(35.10) を満足する正しい $T^0{}_0$ を使わなければならない．

さて，これから $U^l{}_0$ を計算しよう．

$$U^l{}_0 = \frac{1}{8}\left[-2\varphi^{00}{}_{,l}\varphi_{00,0} - 4\varphi^{03}{}_{,l}\varphi_{03,0} - 2\varphi^{33}{}_{,l}\varphi_{33,0} + \varphi_{,l}\varphi_{,0}\right]$$

これに(35.7)を代入して r を十分に大きくとると，$\left(\dfrac{\vec{x}}{r}\right)$ の方向の立体角 $d\Omega = d(\cos\theta)\cdot d\phi$ の中に放射されるエネルギーは

$$\begin{aligned} U^l{}_0 \cdot d\sigma_l &= U^l{}_0 \cdot \frac{x^l}{r} \cdot r^2 d\Omega \\ &= \frac{I^2 \kappa \omega^6}{8\times 16 c^2 \pi^2} \sin^2 \omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot(1-\cos^2\theta)^2 \cdot d\Omega \end{aligned} \tag{35.12}$$

したがって，z 軸の方向に振動している振動子から放射されるエネルギーは z - 軸の方向では0，xy 面上，つまり振動子に垂直な方向が一番強い．なお，φ^{00} の第1項，すなわち Newton のポテンシャルに似た項は r の増大と共に早く0になり，(35.12) にはきかない．

(35.12) を (35.11) に代入すると

$$c\int_0^{2\pi/\omega} dt \iint U^l{}_0 \cdot \frac{x^l}{r}\cdot r^2 d\phi \cdot d(\cos\theta) = \frac{I^2 \kappa \omega^5}{60\cdot c} = \frac{2\pi G \omega^5}{15 c^5}\cdot I^2$$

となる．G は Newton の万有引力定数である．これを1周期 $T=2\pi/\omega$ で割ると，重力波を放射することによって質点系が失う単位時間あたりのエネルギー量

$$Q = \frac{G\omega^6 I^2}{15 c^5} \tag{35.13}$$

が出てくる．

以上は重心が原点に静止している Lorentz 系を用いて計算を行なった．もし重心が時

間と共に移動しているときは，質点系の全運動量 $\vec{P}$ は 0 でない．したがって，このときは φ^{03} には双極子による項が付け加わる．すなわち，(35.5) から*)

$$\varphi^{03}=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}c\cdot P^3+\varphi^{33}\frac{(r^3)}{r}$$

となる．しかし，この第1項は，φ^{00} の Newton ポテンシャルの項と同様に，$U^{l}{}_{0}$ の計算にはきいてこない．したがって重力波によるエネルギーの消耗は，質点系の4極子モーメントまたはそれより高次の多極子モーメントによる放射が原因となり，双極子モーメントはきかないことがわかる．

§ 36.　重力波の吸収

永久重力場の存在を確かめるのには，§ 17 で述べたように，互いに接近した2個の質点の相対的位置の変化をしらべなければならない．それゆえ，重力波の検波にも1対の質点を用いる必要がある．

§ 17 と同じように，ある瞬間に1本の曲線 K（たとえば x－軸）の上にならんだ1対の質点 P, Q を考える．曲線上の定点（たとえば x－軸上にならんだ P, Q のときは，座標原点）からPまで，曲線Kにそって測った距離を u, Q までのそれを $u+\Delta u$ とする（**第3図参照**）．

各質点はそれぞれの運動方程式にしたがって各自の世界線をえがく．そこでこれらの世界線と，上に考えた曲線Kとの交点を起点として世界線にそって測った距離を s とする．そうすると，P, Q の4次元座標はそれぞれ，$x^\mu{}_P=x^\mu(s,u)$, $x^\mu{}_Q=x^\mu(s,u+\Delta u)$ となる．

$s=0$ としたときは，$x^\mu(0,u)$, $x^\mu(0,u+\Delta u)$ は共にKの上にのっている．

これらの質点の運動方程式は，静止質量を $m_P=m_Q=m$ として

$$\left.\begin{aligned} mc^2\frac{\delta^2x^\mu(s,u)}{\delta s^2}&=F^\mu(s,u)\\ mc^2\frac{\delta^2x^\mu(s,u+\Delta u)}{\delta s^2}&=F^\mu(s,u+\Delta u)\end{aligned}\right\}\qquad(36.1)$$

とする．F^μ は重力以外の4元力である．ここで，任意のベクトル $V^\mu(x)$ の共変微分について次のような記号を使うことにする．

---

*) φ^{03} の最後の項の r^3 はベクトル $\vec{r}$ の第3成分という意味である．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta V^\mu}{\delta s}&=\frac{\partial x^\nu(s,u)}{\partial s}\cdot\nabla_\nu V^\mu\\ \frac{\delta V^\mu}{\delta u}&=\frac{\partial x^\nu(s,u)}{\partial u}\cdot\nabla_\nu V^\mu\end{aligned}\right\}\qquad(36.2)$$

§ 17 と違う点は（36.1）の右辺に F^μ がついているだけである．したがって（17.4）式を導いたやり方を（36.1）にそのまま適用すると

$$\frac{\delta^2\eta^\mu}{\delta s^2}+R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial s}\eta^\rho\frac{\partial x^\sigma}{\partial s}=\frac{1}{mc^2}\frac{\delta F^\mu}{\delta u}\cdot\Delta u\overset{d}{\equiv}f^\mu\qquad(36.3)$$

となる．ここで，η^μ は

$$\eta^\mu=\frac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial u}\cdot\Delta u$$

である．

いま η^μ を

$$\eta^\mu=\xi^\mu+\zeta^\mu\qquad(36.4)$$

とおき，ξ^μ は

$$\frac{\delta^2\xi^\mu}{\delta s^2}=0$$

を満足するものする．この ξ^μ がわかっていれば（36.3）は ζ^μ に対する式となる．すなわち

$$\frac{\delta^2\zeta^\mu}{\delta s^2}-f^\mu=-R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial s}(\xi^\rho+\zeta^\rho)\frac{\partial x^\sigma}{\partial s}\qquad(36.3)'$$

ここで計算を容易にするために次のような座標系をえらぼう．すなわち，ある瞬間にその座標系からみると，質点系 P, Q の重心が瞬間的に静止してみえるものとする．P, Q は共に重心からごくわずかしか離れていないとするから，この座標系からみれば P, Q の速度は c に比べて非常に小さいと考えられる．それゆえ，P の世界線の長さ s について近似的に

$$ds=cdt,\qquad\qquad \frac{\partial x^\nu}{\partial s}=\begin{cases}0 & (\nu=1,\,2,\,3)\\ 1 & (\nu=0)\end{cases}$$

としてよい．

さらに，ここで“弱い重力場”の仮定をする．すなわち，曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}$ は $\sqrt{\kappa}$ の程度の小さい量と考える．また，（36.4）で ζ^μ は $\sqrt{\kappa}$ の程度の小さい量で，かつ $|\xi^\mu|\gg|\zeta^\mu|$ とする．このように仮定すると，(36.3)′ は

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{dt^2} - c^2 f^\mu = -c^2\cdot R^\mu{}_{0,\rho 0}\xi^\rho \qquad (36.3)'$$

となる．ここで，ζ と $R^\mu{}_{0,\rho 0}$ の積や，ζ と $\partial\Gamma/\partial x$ の積は無視した．

さて，重力以外の力 f^μ について

$$-c^2 f^\mu = \omega_0{}^2\zeta^\mu + R\frac{d\zeta^\mu}{dt} \qquad (36.5)$$

とおく．そうすると，ζ^μ に対する運動方程式は

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{dt^2} + \omega_0{}^2\zeta^\mu + R\frac{d\zeta^\mu}{dt} = -cR^\mu{}_{0,\rho 0}\xi^\rho \qquad (36.6)$$

となる．すなわち，f^μ として，ここでは PQ を結ぶばねによる力 $-m\omega_0{}^2\zeta^\mu$ と摩擦力 $-mR\cdot\dfrac{d\zeta^\mu}{dt}$ を考えたわけである．(36.6) は摩擦のある調和振動子に重力がはたらいて強制振動をさせている形になっている．なお，ξ^ρ については，ここの仮定では

$$\frac{d^2\xi^\rho}{dt^2} = 0$$

としてよいから，今後は ξ^ρ = 一定とする．したがって，PQ 間の間隔は大体一定の値 ξ^ρ であるが，この質点系に外部から重力波がはたらいて小さな振幅の強制振動 ζ^ρ が起きるため，PQ 間の間隔はわずかに変化することになる．

さて，弱い重力場の近似では

$$R^\alpha{}_{\beta,\mu\nu} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[h^\alpha{}_{\nu,\beta\mu} + h_{\mu\beta,}{}^\alpha{}_\nu - h_{\nu\beta,}{}^\alpha{}_\mu - h^\alpha{}_{\mu,\beta\nu}] \qquad (36.7)$$

特に

$$R^\mu{}_{0,\rho 0} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[h^\mu{}_{0,0\rho} + h_{\rho 0,}{}^\mu{}_0 - h_{00,}{}^\mu{}_\rho - h^\mu{}_{\rho,00}] \qquad (36.7)'$$

となる．いま，振動数 $\omega = ck$ の重力波が z 軸の正の方向に向って入射してきたとする．適当にゲージ変換をすれば，0 でない成分は

$$h_{11} = -h_{22}, \qquad h_{12} = h_{21}$$

の 2 個だけである．いま

$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu}\cos k(z - x^0)$$

とおくと，(36.7)′ から

$$\left.\begin{aligned}
&R^\mu{}_{0,\rho 0}(x)\cdot\xi^\rho = A^\mu\cos k(z-x^0)\\
&A^k \overset{d}{\equiv} \frac{\omega^2}{2c^2}\sqrt{\kappa}\,(a_{k1}\xi^1 + a_{k2}\xi^2) \quad k = 1,\ 2\\
&A^0 = A^3 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (36.8)$$

となる.

(36.8) を (36.6) の右辺に代入するときは (36.8) で $z=0$ とおけばよい. なぜならば, (36.6) の右辺の曲率テンソルは振動子 PQ の重心, すなわち $\vec{x}=0$ における $R^{\mu}{}_{0,\rho 0}$ であるからである. そこでいま

$$\zeta^{\mu}(t)=a^{\mu}\cos\omega t+b^{\mu}\sin\omega t$$

として (36.6) に代入すると, 両辺の $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ の係数の比較から

$$\left.\begin{aligned} a^{\mu}&=\frac{(\omega^2-\omega_0{}^2)c^2A^{\mu}}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\omega R)^2} \\ b^{\mu}&=\frac{-\omega RcA^{\mu}}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\omega R)^2} \end{aligned}\right\} \tag{36.9}$$

となる.

(36.8), (36.9) から次のことがわかる. すなわち, 重力波を受ける振動子 PQ が重力波の入射方向, すなわち z-軸に平行にならんでいるならば, $\xi^1=\xi^2=0$ となるから A^{μ} のすべての成分が 0 となる. したがって, 重力波による強制振動はない. これに対して, もし PQ が入射波に直角に, たとえば x-軸上にならんでいれば, $\xi^1=\xi\neq 0$, $\xi^2=\xi^3=0$ であるから

$$\left.\begin{aligned} A^k&=\frac{\omega^2\sqrt{\kappa}}{2c^2}a_{k1}\cdot\xi \qquad (k=1,\ 2) \\ A^0&=A^3=0 \end{aligned}\right\} \tag{36.8$'$}$$

となる. このときはもちろん強制振動が起きる.

さて, 振動子は摩擦があるので, 重力波からもらったエネルギーはそのまま摩擦によって失なわれる. そこでまず, この摩擦により失なわれるエネルギーを計算してみよう. 摩擦力は

$$-mR\frac{d\vec{\zeta}}{dt}$$

これがなす仕事を一周期にわたって時間平均すると

$$Q=\frac{1}{T}\int_0^T mR\frac{d\vec{\zeta}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\zeta}}{dt}\cdot dt$$

これに (36.8)′, (36.9) を代入すると

$$\begin{aligned} Q&=\frac{mR\omega^2}{2}\{(\vec{a})^2+(\vec{b})^2\} \\ &=\frac{mR\omega^6\cdot\kappa\cdot(\xi)^2}{8\{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\omega R)^2\}}\{(a_{11})^2+(a_{12})^2\} \end{aligned} \tag{36.10}$$

Q は摩擦によって単位時間中に失なわれる平均エネルギーであるが，これはまた振動子が単位時間中に，重力波からもらう平均エネルギーとも解釈できる．(36.10) からわかるように Q は ω の関数である．$\omega = \omega_0$ のときに Q は最大となる．つまり，重力波のエネルギーが最も多く振動子に吸収されるのは $\omega = \omega_0$ のときである．これは重力波と振動子の共鳴にほかならない．そのときの Q を $Q_{\max}$ と書けば

$$Q_{\max} = Q(\omega = \omega_0) = \frac{m\omega_0{}^4\kappa(\xi)^2}{8R}\cdot\{(a_{11})^2 + (a_{12})^2\} \qquad (36.10)'$$

となる．

次に，単位時間中に入射する重力波のエネルギーを計算してみよう．いま，z－軸に垂直な平面上の単位面積を単位時間中に通りぬける平均のエネルギー量は

$$\left|\frac{c}{T}\int_0^T U^3{}_0(x,t)\cdot dt\right| = \frac{1}{T}\left|\int_0^{cT} U^3{}_0(x,t)dx^0\right|$$

である．$U^3{}_0$ は (35.9)′ にあたえられている．ところで，平面重力波のときは，束縛条件

$$h = 0$$

のために

$$h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}, \quad \varphi = h = 0$$

となるから

$$U^3{}_0 = -\frac{1}{4}[h^{\rho\sigma}{}_{,3}\cdot h_{\rho\sigma,0}] = -\frac{(k)^2}{2}\{(a_{11})^2 + (a_{12})^2\}\cdot\{\sin k(z - x^0)\}^2$$

そこで，単位面積を通って単位時間中に入射する重力波の平均エネルギーは

$$\frac{c(k)^2}{4}\cdot\{(a_{11})^2 + (a_{12})^2\} \qquad (36.11)$$

となる．(36.10) を (36.11) で割ると

$$\sigma = \frac{mR\cdot c\cdot\omega^4\cdot\kappa\cdot(\xi)^2}{2\{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + (\omega R)^2\}} = \frac{4\pi\cdot mR\cdot\omega^4\cdot G\cdot(\xi)^2}{c^3\cdot\{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + (\omega R)^2\}}$$

この σ は面積のジメンジョンをもつことが容易に確かめられる．この σ は振動子による重力波の**吸収の断面積**と呼ばれるものである．σ を最大にするには $\omega = \omega_0$ とすればよい．そのときは

$$\sigma_{\max} = \frac{4\pi m\omega_0{}^2 G}{c^3\cdot R}(\xi)^2$$

前節および § 36 で述べたような考えをもとにして，重力波の実験が 2，3 計画されているがまだ成功していない．

第 VII 章　Einstein の理論の実験的検証

§ 37. 観測の理論

Einstein の理論，すなわち一般相対性理論とこれに基づく重力の理論の実験的検証について述べる前に，まず一般相対論においては何が観測可能な物理量であるか，またそれを観測するのには，少なくとも思考実験の範囲で，どうすればよいかについて考えてみる必要がある．

一般相対論の特徴の1つは，時空内の各点，すなわち世界点の座標 x^{μ} の値はなんら物理的に意味のない数であるということである．第I章で述べたように，この理論で考える座標とは，時空内に起こる各現象，またはこれらの現象の起こった4次元的位置を互いに識別するためにわれわれが勝手につけた番号札のようなものである．せいぜい必要な制限といえば，互いに隣接した2点の番号は大体似たもので，あまり飛躍的に変化しては困るということ，つまり番号の“連続性”の条件ぐらいのもので，これ以外には全く勝手に番号を割りふってかまわない．それゆえ，ある物理量が座標 x^{μ} のどんな関数であるかというような質問は意味のないことである．座標の割りふり方を変えれば関数の形も任意に変えられるからである．また，あるベクトル量の成分について議論するときにも同様のことがいえる．これらのことは電磁場のポテンシャルについての議論とよく似ている．電磁場のポテンシャルは，よく知られているように，ゲージ変換によって任意にその値が変えられる．それゆえ，ある瞬間，ある場所におけるポテンシャルの値自身を測定しようとしても無意味である．これは観測可能な量ではない．これに対してポテンシャルの微分から作られる電磁場の強さはゲージ変換に対して値が不変で，それは観測可能な物理量といえる．このような事情，ことに電磁気学との対比を考えると，一般相対論では特に“観測の理論”を考える必要があることがわかるであろう．

さて，一般相対論に出てきた多くの概念のなかで最も基本的なものは，物理現象の起った4次元的位置を示す“世界点”，および“固有時間”である．そこで観測の理論を展開するにあたって，まずこの両者をいくらでも正確に観測できるものと仮定することは当然といえよう．

固有時間を測定するためには“理想時計”の存在を仮定しなければならない．いま，質点が世界点Aを出発して他の世界点Bに到達したとする．この間に経過した質点の固有時間を理想時計を使って測定することを考えてみよう．それにはこの時計を質点にしばりつ

ければよい．そして，質点がちょうどAと一致した瞬間（世界点は観測可能であるという根本仮定の1つから，このAと質点との一致の瞬間は正確に観測できる）からBに一致するまでに，時計の目盛がどれだけ進んだかを読めばよい．いいかえると，理想時計の1周期の固有時間を単位として質点の固有時間を測定したことになる．

理想時計としては，たとえば，次のような機構をもった水素原子時計が考えられる．いま，軌道電子（最低のエネルギー状態にあるものとする）がその原子核のまわりを1周するごとに，目盛が1つずつ進むようになっているとする．このような時計は世界中どこでも，またいつでも，水素原子が手にはいりさえすれば，必ず作ることができる．ところで，水素原子はどれも互いに全く同じ構造をもっていると考えるのは当然のこととしてよかろう*）．したがってこの原子時計は，すべて1目盛進むに要する固有時間が常にどれも等しい．この意味からも，このような時計は理想的である**）．

さて，観測の対象となる物理量の値は，われわれが理論的計算をするために勝手に用いた座標系に無関係なものでなければならない．つまり，**観測可能な物理量は不変量，すなわちスカラー量**ということになる．それでは，あるベクトル量の，たとえば z－成分を観測するというようなことは無意味であろうか．答は“z－成分は不変量であるから観測の対象となりうる”．この答は本節のはじめに述べたことと一見矛盾しているが，実はそうではない．そもそも z－軸というものは単なる観念的なものではなく，観測に際して z－軸というときは，それは観測装置によって他の x, y－軸から区別され特別扱いされている方向を示す．たとえば，大きな磁石によって作られた磁場の方向を z－軸と呼ぶことにすれば，これは物理的にまた操作的にはっきり決まった方向である．したがって，ある物理量のこの方向への射影（これがその物理量の z－成分と呼ばれるものである）は不変量で，計算に使う座標系の取り方に無関係なことはもちろんである．

Einstein の理論の実験的証拠として，一般によく知られているものに次の3つの実験がある．すなわち，スペクトル線のずれ，重力場による光の彎曲，および水星の近日点の移動についての観測である．これらの場合に観測される量をすべて不変量の形に書き表わすことはもちろん可能である．しかし，これを実際に導き出してみせるにはめんどうな数

---

*） §41 の“等価原理”の説明を参照せよ．

**） 原子内の軌道電子の位置を時々刻々追跡することは，技術的にも困難であるが，量子力学によればこのことは原理的に不可能である．したがって，このような原子時計は実際には作れない．しかし，原子から放射される光のスペクトルは原子によって決まっている．そこで，特定な原子（たとえば Cd）の特定のスペクトル線（たとえば赤線）を指定すれば，その光の1週期は普遍的なものである．そこで，この1週期を時間の単位に使うことは実際に可能である．これが実用的な原子時計の1例である．

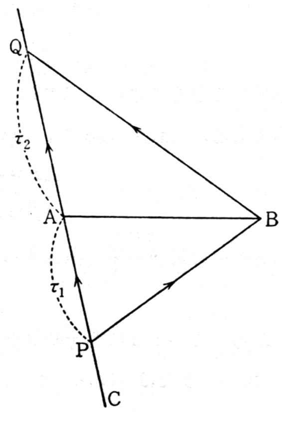
式を書かねばならないから，本書では結果を紹介するのにとどめる．

さて，上述のように観測可能な物理量がなんであるかわかったから，次に考えるべきことは，これらの諸量をはじめに仮定した“世界点の観測”と“固有時間の測定”だけをもとにして，どのように観測するかということである．あるいは，むしろ上述の2つの仮定から他のいろいろの物理量がどのように操作的に定義できるかということを考えるといった方が適当かもしれない．本書では，次の節以下で特に大切なこと，たとえば，空間的位置にある2点のあいだの不変距離，Riemann Christoffel テンソルの測定（思考実験の範囲で）等について概説することにする．

§ 38. 空間的距離，ベクトルのスカラー積の測定

2個の世界点 A, B の相対的位置が時間的関係にあるときは，適当に質点の運動の初期条件を調整することによって，この質点の世界線が A, B 両方の点を通過するようにさせることが必ず可能である．これは，質点の世界線を決める運動方程式が，その固有時間についての2階微分方程式であるためである．そこで前節に述べたようにこの質点に原子時計をしばりつけてやれば，A, B を結ぶ測地線にそって A, B 間の固有時間を測定することが必ずできる．

これに反して，もし A, B の相対的関係が空間的なときには，上に述べた議論は適用できない．そこで，A, B 間の空間的距離を原子時計のたすけをかりて測定することをくふうしてみよう．



第 8 図

いま，点BはAから無限小の距離だけ空間的に離れているものとする．もしBがAから有限の距離だけ離れているときは，これらを結ぶ曲線を多数の小区分に分割して，その各区分についてこれから述べる方法を適用すればよい．

さて，ここで大切なことを思い出そう．すなわち，たとえ永久重力場が存在しても，もし時空内の十分に小さい領域（正確にいえば，この領域のさしわたしはその点における時空の曲率半径に比べて十分に小さいことが必要である）にかぎるならば，特殊相対論で成り立ったことはそのままこの領域内で正しく成立するということである．ところで特殊相対論では，空間的

に離れた2点の間の距離を測るには，この2点の間に光を往復させ，その往復に要した時間を測って，逆に距離を測定する．そこでこの方法をいまのわれわれの問題に適用しよう．

いま，自由に放置された原子時計の世界線（測地線）を C とする．（**第8図参照**）．点 A はこの C の上にのっているものとする．C 上の1点 P から発射された光は B に達し，そこで反射されて C 上の Q 点に返ってきたとする．P, B を結ぶ4元ベクトルを $(PB)^\mu$（P から B に向かうベクトル）とすると，これは光の進路を示すベクトルであるから

$$(PB)^2=(PB)_\mu(PB)^\mu=0 \tag{38.1}$$

同様に $(BQ)^\mu$ についても

$$(BQ)^2=0 \tag{38.2}$$

ところで，

$$\begin{aligned}(PB)^\mu &= (PA)^\mu+(AB)^\mu\\ (BQ)^\mu &= (BA)^\mu+(AQ)^\mu\\ &= -(AB)^\mu+(AQ)^\mu\end{aligned}$$

これを (38.1)，(38.2) に代入して

$$(AB)^2+(PA)^2+2(AB)^\mu\cdot(PA)_\mu=0 \tag{38.3}$$

$$(AB)^2+(AQ)^2-2(AB)^\mu\cdot(AQ)_\mu=0 \tag{38.4}$$

さて，原子時計による測定では，PA の間の固有時間は τ_1, AQ の間のそれは τ_2 であったとする．すなわち，$(PA)^\mu$ も $(AQ)^\mu$ も時間的ベクトルであるから

$$(PA)^2=-(c\tau_1)^2, \qquad (AQ)^2=-(c\tau_2)^2$$

または

$$(PA)^\mu=(c\tau_1)\cdot e^\mu, \qquad (AQ)^\mu=(c\tau_2)\cdot e^\mu$$

$$e^\mu e_\mu=-1$$

と書くこともできる．これは，ごく小さい領域に限ったために C は直線と考えてよいからである．これを (38.3)，(38.4) に代入すると

$$(AB)^2-(c\tau_1)^2+2(c\tau_1)(AB)^\mu\cdot e_\mu=0$$

$$(AB)^2-(c\tau_2)^2-2(c\tau_2)(AB)^\mu\cdot e_\mu=0$$

両方の式の最後の項を消去すると，

$$(AB)^2=c^2\tau_1\tau_2 \tag{38.5}$$

となる．このように原子時計を使って空間的距離でも測定可能である．

(38.3) または (38.4) から，ベクトル $(AB)^\mu$ の曲線 C への射影は

$$(AB)^\mu\cdot e_\mu=\frac{1}{2}c(\tau_1-\tau_2)$$

となる．この右辺からわかるように，この射影も観測可能である．

もしも $\tau_1=\tau_2$ のときは

$$(AB)^{\mu}\cdot e_{\mu}=0$$

となる．すなわち，空間的ベクトル $(AB)^{\mu}$ は原子時計の世界線に点 A において直交している．このように，ベクトルの直交ということも原子時計だけを使って観測可能である．

上の例では直交しているベクトルの一方は時間的，他方は空間的ベクトルであった．もし両方共が空間的ベクトルのときは，“直交” ということとピタゴラスの定理とは同じである．すなわち，いま $(AB)^{\mu}$, $(AD)^{\mu}$ は共に空間的で，直交するベクトルであるとしよう．いま BD を結んで三角形を作る．そうすると次の関係が成り立つことは容易にわかる．

$$(DB)^{\mu}=(DA)^{\mu}+(AB)^{\mu}=-(AD)^{\mu}+(AB)^{\mu}$$

$$(DB)^2=(AD)^2+(AB)^2-2(AD)^{\mu}(AB)_{\mu}$$

この最後の式に直交条件

$$(AD)_{\mu}(AB)^{\mu}=0$$

を代入すれば

$$(DB)^2=(DA)^2+(AB)^2$$

この各項はすべて測定できるから，この左右両辺が等しいか否かを確かめることによって，$(AD)^{\mu}$ と $(AB)^{\mu}$ の直交が観測できることになる．また，一般に $(AD)^{\mu}$ と $(AB)^{\mu}$ のスカラー積は

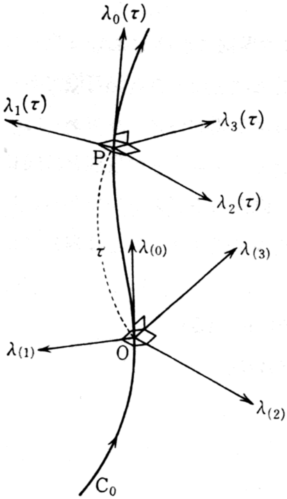
$$(AD)^{\mu}(AB)_{\mu}=\frac{1}{2}\{(DB)^2-(AD)^2-(AB)^2\}$$

この右辺はすべて測定できる量であるから空間的ベクトルの内積も観測可能である．

§ 39.　局所慣性系の設置と Fermi－移動法

世界点の間の距離，2 個のベクトルのスカラー積，またそれらのはさむ角度等につづいて大事な概念は慣性座標系である．時空の曲率テンソルが 0 でない場合には，1 つの慣性座標系によって全 4 次元時空をおおうわけにはいかない（第 I，II 章参照）．しかし時空内の小さい領域に限るならば，いわゆる局所慣性系というものが考えられることはすでに知っている．そこでこれから局所慣性系をどのようにして設置するか，またそれが慣性系であることをどのようにして実験的（少なくとも思考実験の範囲で）に判定できるかについて考えよう．

まず，観測者の世界線を C_0 とする（**第9図参照**）．C_0 は時間的曲線であるが，必ずしも測地線でなくてもよい．この観測者には原子時計を固定しておく．C_0 上の1点Oを原点として原子時計によって時間を測るものとする．それゆえ，固有時 τ をあたえれば，それに応じて C_0 上の1点Pが決まる．ここで後の計算に便利なように，われわれは勝手な座標系（x－系）を導入しよう．そうすると，P の座標 x^μ は τ の既知関数 $x^\mu(\tau)$ となる．



第 9 図

さて，$\tau=0$ の瞬間にOにおいて C_0 に直交し，さらにお互い同士も直交する3個の空間的単位ベクトル

$$\lambda^\mu{}_{(a)} \quad (a)=1,\ 2,\ 3$$

を設置しよう．この3本のベクトルはもちろん1通りには決まらないで任意性がある．たとえば，第1のベクトル $\lambda^\mu{}_{(1)}$ の方向については ∞^2 の自由度がある．しかしともかく § 38 の方法にしたがって原子時計のみを使ってこのような3本のベクトルを必ず設置できる．もし点Oにおける C_0 の切線ベクトル（時間的ベクトル）を

$$\left(\frac{dx^\mu(\tau)}{cd\tau}\right)_{\tau=0} \stackrel{d}{\equiv} \lambda^\mu{}_{(0)} \tag{39.1}$$

とおけば，これら4個の単位ベクトルについては

$$(\lambda_{\mu(a)}\lambda^\mu{}_{(b)})=\eta_{ab}=\begin{cases} 1 & a=b=1,\ 2,\ 3 \\ 0 & a\neq b \\ -1 & a=b=0 \end{cases} \tag{39.2}$$

という関係が成立することが容易にわかる．ここで，ギリシャ文字の添字はわれわれが勝手に考えた x－系に関するベクトル成分を示す．これに対して (a), (b) などはベクトルの番号を示す添字である．これら4個のベクトルが1次独立であることを考えに入れると，(39.2) から*)

*) (a), (b) はテンソル添字ではないが，この添字の上下については特殊相対論の場合と同じように，Minkowski の計量テンソル η_{ab}, η^{ab} を使って上下させる．また，同じ (a) が1つの式の上下に出てくるときは，テンソルの添字と同じように0から3まで和をとるものとする．

$$\lambda^{\mu}{}_{(a)}\lambda^{\nu(a)} \stackrel{d}{\equiv} \sum_{a,b=0}^{3} \lambda^{\mu}{}_{(a)}\lambda^{\nu}{}_{(b)}\eta^{ab} = g^{\mu\nu} \tag{39.3}$$

という関係が成り立つことがわかる．

(39.2)，(39.3) から，これら4個の単位ベクトルは $\tau=0$ の瞬間において1つの4次元直交座標系の座標軸に相当することがわかる． 特にこのなかで $\lambda^{\mu}{}_{(0)}$ は時間軸に相当する．

ところで，$\lambda^{\mu}{}_{(0)}$ は任意の時刻 τ においても，C_0 の切線ベクトルという定義から τ のどのような関数かはすでにわかっている． これに反して， 他の3個の空間的ベクトル $\lambda^{\mu}{}_{(a)}$ ($a=1, 2, 3$) はただ $\tau=0$ の瞬間にだけ設置されたものである． τ が経過するにつれて，C_0 にそってこれらの $\lambda^{\mu}{}_{(a)}$ をどのように次々に設定したらよいかはまだなにもわかっていない． これを決めるには次の条件を満足させる必要がある． すなわち， 4個のベクトルの間の直交関係を保持すること，および慣性系になっていることの2つである． これらの条件を満すもっともつごうのよい規則としては，$\lambda^{\mu}{}_{(a)}$ ($a=1, 2, 3$) に対する次の方程式が考えられる．

$$\frac{\delta\lambda^{\mu}{}_{(a)}(\tau)}{\delta\tau} = -\lambda^{\mu}{}_{(0)}(\tau)\cdot\lambda_{\nu(0)}(\tau)\cdot\frac{\delta\lambda^{\nu}{}_{(a)}(\tau)}{\delta\tau} \qquad (a=1, 2, 3) \tag{39.4}$$

ここで，$\delta\lambda/\delta\tau$ は曲線 C_0 にそった共変微分で

$$\frac{\delta\lambda^{\mu}{}_{(a)}}{\delta\tau} \stackrel{d}{\equiv} \frac{d\lambda^{\mu}{}_{(a)}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\Big(x(\tau)\Big)\cdot\frac{dx^{\rho}(\tau)}{d\tau}\cdot\lambda^{\sigma}{}_{(a)}(\tau)$$

のことである．

さて，一般にあるベクトル V^{μ} を曲線 C_0 にそって移動させたとして，C_0 上の任意の点P（時刻 τ ）におけるこのベクトルを $V^{\mu}(\tau)$ とする． もし $V^{\mu}(\tau)$ が

$$\frac{\delta V^{\mu}(\tau)}{\delta\tau} = \left(\lambda^{\mu}{}_{(0)}(\tau)\cdot\frac{\delta\lambda_{\nu(0)}(\tau)}{\delta\tau} - \frac{\delta\lambda^{\mu}{}_{(0)}(\tau)}{\delta\tau}\cdot\lambda_{\nu(0)}(\tau)\right)\cdot V^{\nu}(\tau)$$

を満足するときは，V^{μ} は **Fermi-Walker の移動法**にしたがって C_0 にそって移動するという． 特に V^{μ} が直交条件

$$V^{\mu}(\tau)\cdot\lambda_{\mu(0)}(\tau) = 0$$

を満足するときは，上の方程式は

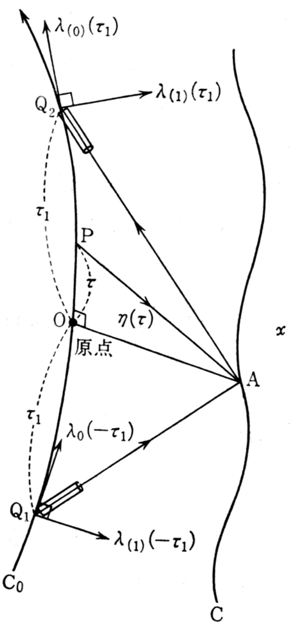
$$\frac{\delta V^{\mu}(\tau)}{\delta\tau} = \lambda^{\mu}{}_{(0)}\cdot\frac{\delta\lambda_{\nu(0)}}{\delta\tau}\cdot V^{\nu} = -\lambda^{\mu}{}_{(0)}\cdot\lambda_{\nu(0)}\cdot\frac{\delta V^{\nu}}{\delta\tau}$$

となる． この場合には，V^{μ} は **Fermi の移動法**にしたがって移されるという． (39.4) はまさに Fermi の移動法になっている． 特に，C_0 が測地線ならば

$$\frac{\delta\lambda^{\mu}{}_{(0)}}{\delta\tau}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\delta^2 x^{\mu}}{\delta\tau^2}=0$$

となる．したがって，この場合には Fermi-Walker の方法も Fermi の方法も，普通の平行移動と同じ移動法になる．このことから，Fermi の移動法は平行移動の最もすなおな拡張といえる．なお，この Fermi の方法にしたがうときは，すべての $\lambda^{\mu}{}_{(a)}(a=0,1,2,3)$ の直交関係は τ に無関係に成立することが容易にわかるであろう．

それでは，局所直交座標系 $\lambda^{\mu}{}_{(a)}(\tau)$ $(a=1,2,3)$ が Fermi の移動法にしたがって，時間 τ の経過と共に C_0 にそって移っていくことを実験的に確かめるのにはどうすればよいか．それには次のような思考実験を考えてみよう．



第 10 図

まず，光を決まった方向に発射する投光器にもなり，同時に光を観測する望遠鏡にもなる便利な道具を用意しよう．これは細長い管状の道具でその先端には小さな穴があって，この穴を通して光を発射したり，また外からの光はこの穴を通って観測されるものとする．

さて，空中に風船を飛ばし，それに鏡Aをしばりつけておく．鏡の世界線を C としよう（**第 10 図参照**）．一方，観測者の世界線は C_0 である．いま，C_0 上の点 Q_1 から空中の鏡に向かって，上に述べた道具を使って光を発射したとする．光はAで反射されて，再び Q_2 において観測者の所に帰ってきたとし，OQ_1, OQ_2 の間の時間は共に τ_1 であったとする．このことは OA が O において C_0 と直交することを示す．ここで議論を簡単にするために，OA の距離（これは上の仮定から $c\tau_1$ である）は特殊相対論的取扱いができるほどに小さいものとしておく．

さて，Q_1 において局所直交座標系 $\lambda^{\mu}{}_{(a)}$ を設置する．これはある決まった移動法（必ずしも Fermi の移動法でなくてもよい）にしたがって C_0 にそって時間の経過につれて移っていくものとする．したがって，$\lambda^{\mu}{}_{(a)}$ は τ の関数である．

いま，Q_1 から光を発射するとき望遠鏡（投光器）の方向をこの局所系に対してしっかり固定しておくものとする．時間が $2\tau_1$ だけ経過して光が A から帰ってきたときに，も

し光の入射方向が望遠鏡の方向と一致していれば，Q_2 において，望遠鏡を通して光を見ることができる．このときわれわれは“望遠鏡の方向がはじめのままで変わらなかった”ということにする．言葉を変えれば，“局所系は時間がたってもその向きを変えなかった”ということにする．これに対して，望遠鏡の向きが A からの光の向きとくいちがっていれば光を見ることはできない．このときは，“局所系は時間がたつにつれてその向きを変えた”ということにする．

さて，話を本筋にもどして，この実験で，Q_2 において望遠鏡を通して光が見えるための必要十分条件は，$\lambda^{\mu}{}_{(a)}(\tau)$ が Fermi の移動法にしたがって C_0 にそって移動しなければならないということである．あるいは，局所系が時間がたってもその向きを変えないためには Fermi の移動法にしたがうことが必要であり，またそれで十分であるということになる．これを証明しよう．

まず，定点 A の座標を α^{μ} とおく（**第 10 図参照**）．また，C_0 上の時刻 τ における観測者の位置 P の座標を $x^{\mu}(\tau)$ として

$$\eta^{\mu}(\tau)=\alpha^{\mu}-x^{\mu}(\tau) \tag{39.5}$$

とする．

OA は C_0 に直交するという仮定から

$$\eta^{\mu}(0)\cdot\lambda_{\mu(0)}(0)=0 \tag{39.6}$$

ただし

$$\lambda^{\mu}{}_{(0)}(\tau)=\frac{1}{c}\frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}$$

である．$\eta^{\mu}(\tau)$ を局所系 $\lambda^{\mu}{}_{(a)}(\tau)$ からみたときの局所座標軸の方向への射影は

$$\eta^{(a)}(\tau)=\eta^{\mu}(\tau)\lambda_{\mu}{}^{(a)}(\tau) \qquad (a=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{39.7}$$

これに (39.6) を代入すると，

$$\eta^{(0)}(0)=\eta^{\mu}(0)\cdot\lambda_{\mu}{}^{(0)}(0)=0 \tag{39.6$'$}$$

である．

さて，Q_1 の所で固定された望遠鏡の空間的向きは

$$\eta^{(a)}(-\tau_1) \qquad (a=1,\ 2,\ 3)$$

である．仮定により，この向きはそのまま変わらない．一方，Q_2 における A からの光の進行方向（空間的方向）の向きを反対にしたものは

$$\eta^{(a)}(\tau_1) \qquad (a=1,\ 2,\ 3)$$

この両者が一致することが，光が望遠鏡を通して見えるための必要条件である．そこで，

上の両方の式を τ_1 について展開して

$$\eta^{(a)}(-\tau_1)=\eta^{(a)}(0)-\tau_1\left(\frac{d\eta^{(a)}(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=0}+0(\tau_1^2)$$

$\eta^{(a)}(\tau_1)$ についても同様の展開を行なうと，両者が等しいためには

$$\left(\frac{d\eta^{(a)}(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=0}=0 \qquad (a=1,\ 2,\ 3) \tag{39.8}$$

ならよい（ただし τ_1 の1次までの近似）．したがって，この近似では

$$\eta^{(a)}(\tau)=\eta^{(a)}(0)+\tau\left(\frac{d\eta^{(a)}(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=0}=\eta^{(a)}(0)=\text{一定} \tag{39.9}$$

となる．それゆえ，(39.8) は $\tau=0$ でなくても成立する．すなわち

$$\frac{d\eta^{(a)}(\tau)}{d\tau}=0 \tag{39.8$'$}$$

となる．

(39.8)′ に (39.7)，および (39.5) を代入すると

$$-\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)+\eta^\mu(\tau)\cdot\frac{d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}=0$$

あるいは

$$-c\lambda^\mu{}_{(0)}(\tau)\cdot\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)+\eta^\mu(\tau)\frac{d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}=0 \qquad (a=1,\ 2,\ 3) \tag{39.10}$$

とも書き直せる．

ところで，局所直交系 $\lambda_\mu{}^{(a)}$ $(a=1,\ 2,\ 3)$ は常に $\lambda^\mu{}_{(0)}$ に直交しているから第1項は0となる．また，(39.3) および (39.7) により

$$\eta^\mu(\tau)=\sum_{b=0}^{3}\eta^{(b)}(\tau)\cdot\lambda^\mu{}_{(b)}(\tau)$$

と書けるから，これに (39.6)′ および (39.9) を代入して

$$\eta^\mu(\tau)=\sum_{b=1}^{3}\eta^{(b)}(0)\cdot\lambda^\mu{}_{(b)}(\tau)$$

この結果を (39.10) に代入すると

$$\sum_{b=1}^{3}\eta^{(b)}(0)\cdot\left(\lambda^\mu{}_{(b)}(\tau)\cdot\frac{d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}\right)=0 \qquad (a=1,\ 2,\ 3)$$

風船の位置は任意にとれるから，$\eta^{(b)}(0)$ は任意の数と考えられる．したがって，$d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)/d\tau$ は3個の座標軸のいずれとも直交しなければならない．このことは，この微分が時間軸 $\lambda_{\mu,(0)}$ に比例することを意味する．すなわち

$$\frac{d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}=K^{(a)}(\tau)\cdot\lambda_{\mu(0)}(\tau)$$

とおける．$K^{(a)}(\tau)$ は比例因数である．この $K^{(a)}$ を決めるには両辺に $\lambda^\mu{}_{(0)}(\tau)$ を掛けて

$$\lambda^\mu{}_{(0)}(\tau)\cdot\frac{d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}=-K^{(a)}(\tau)$$

したがって

$$\frac{d\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}=-\lambda_{\mu(0)}(\tau)\cdot\lambda^\nu{}_{(0)}(\tau)\cdot\frac{d\lambda_\nu{}^{(a)}(\tau)}{d\tau}$$

となる．これはまさに (39.4) にほかならない．

以上で Fermi の移動法が必要条件であることはわかった．この逆も容易に証明できるから，局所系が Fermi の移動法にしたがうということと，光が Q_2 において望遠鏡を通して観測できるということと同じことになる．

§ 40. 曲率テンソルの測定

前節では，Fermi の移動法にしたがって移っていく局所直交座標系の設置法，つまり局所系が Fermi 移動法にしたがっていることの実証の仕方について説明した．そこで，この局所系が確かに局所慣性系であることをこれから証明しよう．

慣性系になっていることを示すのには，この系からみたときの質点の運動が，もし外力が作用しないときには等速直線運動になることを示せば十分である．

これから次のような思考実験をする．観測者は人工衛星にのって地球のまわりを軌道運動をしているとする．この観測者の世界線を C_0 とすると，C_0 は測地線である（衛星はロケット噴射を停止して，ただ地球やその他の天体からの万有引力だけの作用をうけて運動しているものとする）．観測者は前節の方法にしたがって自分のまわりに局所直交座標系を設置してある．この人工衛星とならんで，そのすぐ近くを飛行している第2の人工衛星を考えよう．この世界線を C とすると C ももちろん測地線である．

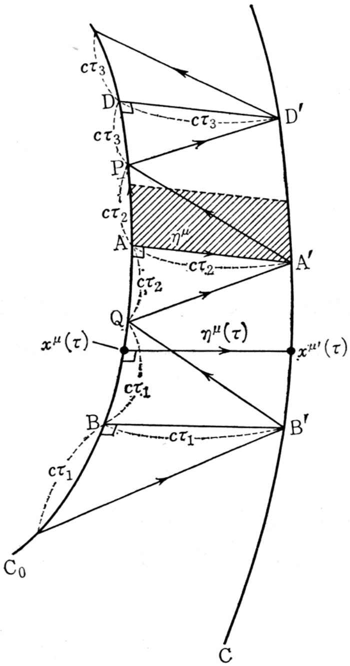
さて，C_0 上のある定点から固有時間を測るものとして，時刻 τ に第1の衛星のいる位置を A，その座標を $x^\mu(\tau)$ とする（**第 11 図参照**）．A において C_0 に直交する超平面と C との交点を A′，その座標を $x^{\mu\prime}(\tau)$ とする．

$$\eta^\mu(\tau)\overset{d}{\equiv}x^{\mu\prime}(\tau)-x^\mu(\tau)$$

は無限小 4 元ベクトルである．（η については p. 192 に詳しい説明がある）

C_0 も C も測地線であるから，これらの間の間隔 η^μ については

$$\frac{\delta^2\eta^\mu}{\delta\tau^2}+R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}(x(\tau))\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta^\rho\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0 \tag{40.1}$$



第 11 図

が成立する（§ 17 の式（17.4）参照）.

さて，第 2 の衛星を第 1 衛星に設置した局所直交座標系からながめたとき，第 2 衛星の位置を示す直交座標は

$$\eta^{(a)}(\tau)\overset{d}{\equiv}\eta^\mu(\tau)\cdot\lambda_\mu{}^{(a)}(\tau)\quad(a=0,1,2,3) \tag{40.2}$$

となる．ここで，$\eta^\mu(\tau)$ が C_0 と直交するという仮定から

$$\eta^{(0)}(\tau)\overset{d}{\equiv}\eta^\mu(\tau)\lambda_\mu{}^{(0)}(\tau)=0 \tag{40.2$'$}$$

である．すなわち，$\eta^{(a)}$ は 3 次元ベクトルと考えてよい．

また，前節でも注意したように C_0 が測地線のときは， Fermi の移動法も平行移動も同じになって

$$\frac{\delta\lambda^\mu{}_{(a)}}{\delta\tau}=0\quad(a=0,1,2,3) \tag{40.3}$$

となる．そこで，(40.3), (40.1) を使って $\eta^{(a)}$ の加速度を計算してみよう．

$$\frac{d^2\eta^{(a)}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\eta^\mu}{\delta\tau}\cdot\lambda_\mu{}^{(a)}+\eta^\mu\cdot\frac{\delta\lambda_\mu{}^{(a)}}{\delta\tau}\right)$$

この第 2 項は 0 となるから

$$=\frac{\delta^2\eta^\mu}{\delta\tau^2}\cdot\lambda_\mu{}^{(a)}+\frac{\delta\eta^\mu}{\delta\tau}\;\frac{\delta\lambda_\mu{}^{(a)}}{\delta\tau}=\lambda_\mu{}^{(a)}\cdot\frac{\delta^2\eta^\mu}{\delta\tau^2}$$

これに（40.1）を代入して

$$\frac{d^2\eta^{(a)}}{dt^2}+c^2\sum_{b=1}^{3}R^{(a)}{}_{(b)}\cdot\eta^{(b)}=0\quad(a=1,2,3) \tag{40.4}$$

となる．ここで $R_{(a)(b)}=R_{(b)(a)}$ は

$$R^{(a)}{}_{(b)}=R_{(a)\cdot(b)}\overset{d}{\equiv}R^\mu{}_{\nu,\rho\sigma}\lambda_{\mu(a)}\cdot\lambda^\nu{}_{(0)}\cdot\lambda^\rho{}_{(b)}\cdot\lambda^\sigma{}_{(0)}\qquad(a,b=1,2,3)$$

のことである．これは 6 個のスカラー量である．

(40.4) の特別な場合として，仮りにこの局所系の近所で永久重力場が存在しないときは $R_{(a)(b)}=0$ となり，第2衛星は

$$\frac{d^2\eta^{(a)}}{d\tau^2}=0 \tag{40.4$'$}$$

を満足する．すなわち，この座標系からみるときは，座標系自身の加速度運動に起因する慣性力のようなものは存在しない．(40.4)′ はこの系が慣性系であることを示している．

さて，(40.4) を逆用すると，第2衛星の加速度を測定することによって，Riemann の曲率テンソルから作った $R_{(a)(b)}$ を実測できる．

(40.4) は3次元のベクトル式でめんどうであるから，この代りに $\eta^{(a)}$ の絶対値の変化をしらべることにする．

$$\eta \overset{d}{\equiv} \sqrt{\sum_{a=1}^{3}\eta^{(a)}\eta^{(a)}}$$

として，単位ベクトル $e^{(a)}(\tau)$ を

$$e^{(a)}(\tau)\overset{d}{\equiv}\frac{\eta^{(a)}(\tau)}{\eta(\tau)} \quad \text{または} \quad \eta^{(a)}(\tau)\overset{d}{\equiv}\eta(\tau)\cdot e^{(a)}(\tau) \tag{40.5}$$

によって定義する．

$$\sum_{a=1}^{3} e^{(a)}(\tau)\cdot e^{(a)}(\tau)=1$$

であるから，これを τ で微分して

$$\sum_{a=1}^{3} e^{(a)}(\tau)\cdot\frac{de^{(a)}(\tau)}{d\tau}=0 \tag{40.6}$$

さらにもう1度微分して

$$\sum_{a=1}^{3} e^{(a)}\cdot\frac{d^2e^{(a)}}{d\tau^2}=-\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{de^{(a)}(\tau)}{d\tau}\right)^2 \tag{40.7}$$

という関係が得られる．

(40.5) を τ について2度微分し，それに (40.6), (40.7) および (40.4) を代入すると，

$$\sum_{a}\left(\frac{de^{(a)}}{d\tau}\right)^2-\frac{1}{\eta}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}=R_{\mu\nu,\rho\sigma}\eta^{\mu}\cdot\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\cdot\eta^{\rho}\cdot\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\Big/\eta^2 \tag{40.8}$$

となる．

$e^{(a)}$ $(a=1, 2, 3)$ は局所系からながめたときの，第2衛星の方向を示す単位ベクトルであるから，(40.8) の左辺第1項は第2衛星の角速度の2乗を示す．右辺は**第 11 図**の斜線で塗った無限小面積素片の Gauss 曲率にほかならない．そこで，(40.8) の左辺の

第 1，第 2 項の実測をすれば，時空の曲率が測定できることになる．

(40.8) の左辺の第 2 項を測定するのには， 第 11 図に示してあるように第 1 衛星から光を発射して，第 2 衛星によって反射させ，図のように光を 3 往復させればよい．図からわかるように

$$\eta(D)=c\tau_3,\ \ \eta(A)=c\tau_2,\ \ \eta(B)=c\tau_1$$

そこで

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\tau^2}\right)_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2\tau_2}\left\{\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_{\mathrm{P}}-\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_{\mathrm{Q}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\tau_2}\left\{\frac{c(\tau_3-\tau_2)}{\tau_3+\tau_2}-\frac{c(\tau_2-\tau_1)}{\tau_2+\tau_1}\right\}$$

となる．それゆえ，τ_1, τ_2, τ_3 を実測すれば $d^2\eta/d\tau^2$ はわかる． これで時空の曲率も思考実験的には測定できることがわかった．

いままで当然のこととしてなにもいわなかったが，本節のはじめにおいて，局所直交座標系が慣性系であることを証明するのに用いた最も大切な仮定は $\mathrm{C_0}$ およびCが共に測地線であるということである．すなわち，重力だけの作用をうけて運動している人工衛星の 4 次元軌跡は測地線になるという仮定である． これは Einstein の運動方程式をそのまま認めることになる．これが正しいか否かは別に実験的にしらべなければならない．それについては次節以下で述べる．

観測の理論については， まだいろいろ興味のある 問題が残っている． 本書ではただ Einstein の理論に出てくる重要な概念をいかにして操作的に定義できるかを示すにとどめた． ここに述べたこと以上の問題にさらに関心のある読者には， Synge の名著， J.L. Synge 著， “Relativity : The general Theory” を一読することをすすめて， 観測の理論はこれでうちきる．

§ 41. 等価原理の実験的検証

まずはじめに Einstein の理論全体の構造についてもう一度ふり返ってみよう． というのは，実験的に理論を検証するのに何をしらべれば十分かを知るのには，理論の大綱を思い起こすことが必要であるからである．

一般相対論の出発点は特殊相対論である．この理論については，本書ではすでに実験的に確証されたものとしてこれを承認する．次に特殊相対論に登場するすべての法則，すなわち方程式を曲線座標を使って書き直すと，その結果は一般相対性原理の要請を満足する形になる．しかし，これだけでは単なる数学的書きかえにすぎない．ところで，この曲線

座標を使って書いた式に出てきたxに依存する計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ を重力のポテンシャルとみなすこと，すなわち等価原理を導入することによって，上述の方程式ははじめて新しい物理的内容を持つことになる．つまり，特殊相対論では知ることのできなかった，重力の影響のもとにある物理現象に対する法則が得られたことになる．われわれの立場では，出発点の特殊相対論についてはすでにこれを承認しているのであるから，ここに得られた重力との相互作用についての新しい法則が正しいか否かは，もっぱら等価原理の正当性にかかっている．

Einstein の理論のもう1つの根本仮定は彼の提唱した重力場の方程式である．それゆえ Einstein の全理論の実験的検証をするには，結局等価原理と場の方程式が正しいか否かを検査すればよいことになる．

さて，§2 で述べた等価原理は，簡単にいえば“局所的には重力と慣性力とは区別がつけられない”ということである．これはいいかえれば，局所的な重力の定義ともいえる．人によってはこれを**“弱い等価原理”**と呼ぶ．これに対して**“強い等価原理”**というものがある．それは上の弱い原理に，さらに次の2つの原理をつけ加えたものである．

（i） 時空内のどの点においても必ず局所慣性系を設置できる．この系からみれば，局所的に重力の影響は完全に消去される．すなわち，そこでは重力のなかったときの法則が成り立つ．

（ii） 特殊相対論の法則，またそれにでてくるジメンジョンのない普遍定数は，時空内のどの点においても同じである．

普通，等価原理というときは，上の強弱2種類の原理の区別がはっきりしない．（i）はしばしば誤解のもとになり，(ii) はとかく議論をひき起こす．そこで実験的検証を議論する際には，これら強弱2種類の定義をはっきりと区別しておくのがよい．

まず，弱い原理については，Galileo がピサの斜塔で行なった実験が一番古い．しかし，近代物理学に基づいた実験といえば Eötvös（エートベス）の実験をあげねばならない．この実験については次の節でくわしく述べる．

“強い原理”の（i）についてはすでに述べたように，これは必ずしも成り立つとはかぎらない．すなわち，Riemann テンソル $R^{\mu}{}_{\nu,\rho\sigma}$ が関係する現象では，たとえ局所慣性系からみても，特殊相対論の法則とくいちがう．

(ii) の原理はわれわれが普通常識としてみとめていることを原理としてはっきり主張したものである．われわれの身のまわりでは，特殊相対論が正しく成り立つことが実証され

ている*⁾. しかし，地球から非常にはなれた宇宙の涯(はて)においても，同じ自然法則が成り立つということは，自明なことではない．また，微細構造定数 $\alpha = e^2/\hbar c$ が宇宙の誕生したばかりの大昔においても，いまと同じように 1/137 でなければならないという理由もない．しかし，(ii) の原理が成り立つとすれば，地球上で現在成り立っている法則を安心して宇宙のはずれや，また 10^{10} 年も大昔起こった現象に適用できることになる．ところで最近この強い等価原理の特に (ii) の原理がどの程度に破れていてもかまわないかを見定めようという傾向が出てきた．

まず，物理法則が場所により，また時間によって**定性的**に変わると考えることはむずかしい．たとえば，Maxwell 方程式の1つ，div $\vec{D}$ が電荷密度に等しいという法則が，ある場所では成立するが，その隣りでは成立しないというように不連続的に法則が変わることは除外してよいであろう．しかし，物理法則が時間や場所が変わると共に，**定量的**に変化してもかまわないのではないか．定量的変化とは，法則のなかにでてくる普遍定数が変化することである．たとえば，荷電素粒子の間の電気的相互作用を決める定数 e（これに相当するジメンションのない定数としては微細構造定数 $\alpha = e^2/\hbar c$）とか，核子同士の間の強い相互作用定数は時間や場所によって変ってもよいのではないか．

そこで，いまこれらの定数が仮に場所の関数であるとしよう．そうすると，原子核や原子の結合エネルギーも場所と共に変化する．そこで重力場のなかで，これらの原子核や原子を持ち上げるのに必要な仕事は，その慣性質量（これが実は，結合エネルギーの変化に伴って定数ではありえないことになる）と簡単な比例関係をもたないことになる．一方，この持ち上げるのに要する仕事は重力質量に比例する．そこで，もし Eötvös の実験が完全に等価原理（弱い原理）を証明しているとするならば，上の思考実験の結果はこの原理にそむくことになるから，相互作用定数が場所の関数となることはありえない．

ところで，Eötvös の実験は非常に精度のよい実験である．そのため強い相互作用定数については，上の議論にしたがってこの定数の場所による変化はありえないとしてよかろう．しかし，弱い相互作用定数や万有引力定数 G についてまでその場所による変化を禁止するには，Eötvös の実験の精度は十分でない．

また，上の議論に対しても次のような反論もある**⁾．要するに，上の議論ではエネルギーの保存則が根拠になっている．ところで，相互作用定数が空間的に変化する原因とし

---

*⁾ 必ずしもそうとはいえない．たとえば，特殊相対論の大事な主張の1つ 慣性質量＝(全静止エネルギー ÷ c^2) の関係は Eötvös の実験ほどに高い精度では実証されていない．

⁾ R. H. Dicke : Am. J. Phys. **28 (1960) p. 344

て，われわれの知らない新しい場が宇宙全体にひろがっていて，この場と物質との相互作用がもとになって，上述のように相互作用定数が変化するのであるという説もある．もしこの考えにしたがえば，この未知の場との相互作用エネルギーを考えにいれなければ，エネルギー保存則は使えない．したがって，上の議論は正しくないことになる．

ところで，1938 年に Dirac*) はわれわれの知っている多くのジメンジョンのない普遍定数を，その大きさにしたがって，4つの組に分類した．そして彼は，多くの普遍定数が時間と共にきわめてゆっくりと変化してもかまわないことを推論した．たとえば，次のようなジメンジョンのない定数を考えよう．

$$G\cdot\frac{m_e\cdot m_p}{e^2}=5\times10^{-40}$$

$G=$ 万有引力定数，　$m_e=$ 電子の静止質量，　$m_p=$ 陽子の静止質量

Dirac の考えによるとこの数は，$T(=10^{10}$ 年）を宇宙の年令とすると，毎年 $1/T$ に比例して減少する．すなわち，G の1年間に減少する量を δG と書くと

$$\left|\frac{\delta G}{G}\right|\sim10^{-10}/\text{年} \tag{41.1}$$

Landau**) は，量子電気力学に出てくる“無限大”の因難について，もし重力場と電子や電磁場との相互作用を考えにいれれば，この無限大は消去できるのではないかと考えた．彼の概算によると，この無限大が消去できるためには $\alpha\propto\log G$ ならよい．ところで，Dicke***) は，もしこの Landau のいうことが正しいならば，α の1年間の減少量を $\delta\alpha$ とすると

$$|\delta\alpha/\alpha|\sim10^{-2}\cdot|\delta G/G|\sim10^{-12}/\text{年} \tag{41.2}$$

となることを指摘した．

さきにも述べたように，G や弱い相互作用定数が場所と共に変化するということは，現在の Eötvös の実験の精度では必ずしも排除できない．そうだとすると，地球上における G は，地球の公転による周期的な位置の変化に対応して，G の値にも1年を週期とする変化があるかもしれない．たとえば，宇宙の全質量 M，その半径 R，および G のあいだには，“閉じた宇宙”の考えに基づくと****)

---

*) P. A. M. Dirac : Proc. Roy. Soc. (London) **A 165** (1938) p. 199

**) L. D. Landau : Niels Bohr and tne Development of Physics (W. Pauli 編集) (1955). Mc Graw-Hill, New York.

***) R. H. Dicke : Am. J. Phys. **28** (1960) p. 344

****) A. Einstein : The meaning of Relativity (1955). Princeton University Press.

$$1 \sim G\frac{M}{c^2 R}$$

という関係がある．このような Mach 的な考えにしたがうと，普遍定数は宇宙の全体に関係があることになる．つまりGの値も，全質量 M で大体の値は決まる．しかし，局所的な物質の分布状態は，Gの場所による小さな変化を起こすかもしれない．このような考えから上に述べたGの年間変化 δG をしらべると

$$|\delta G/G| \sim 10^{-8}/年 \tag{41.3}$$

したがって，これに対応するαの週期的変化は Dicke の考えにしたがえば

$$|\delta\alpha/\alpha| \sim 10^{-10}/年 \tag{41.4}$$

となる．

そこで，(41.1)～(41.4) の実験的検証がいろいろ試みられた．まず，Gの時間的変化をしらべることは，地球や太陽の歴史的なデーターが十分でないので非常にむずかしい．一番有望なことは，人工衛星を飛ばしてGの 1 年間にわたる変化を観測することである．また別の方法としては，直接地球上で重力による加速度 g を精密測定することである．Dicke およびプリンストン大学グループは水晶の玉を水晶の紐にぶら下げた振り子を使って，1 年間にわたって，gの連続精密測定を試みた．しかしいまのところ，Gの変化に対しては肯定的な結論は出ていない．

αに対しても 2，3 の実験が行なわれたが，やはりはっきりした結論は出せない．一方，岩石の年令を推定するのに，その中に含まれている放射性物質を利用する方法がある．ところで，もしαが年々変化すれば，これは原子核の結合エネルギーの一部である電気的エネルギーに変化をあたえる．したがって，それは核の崩壊の確率に影響をあたえる．この影響は一般には小さいが，もし崩壊の前後のエネルギー準位がごく接近しているときは，αの変化は崩壊確率に相当に敏感にひびく．この事情はさらに岩石の年令の推定結果にもひびいてくる．そこで，(41.2) のような年々の減少があるとすれば，上の方法で実験的にこれを確かめられることになる．しかしいまのところでは，αの減少はみつかっていない．

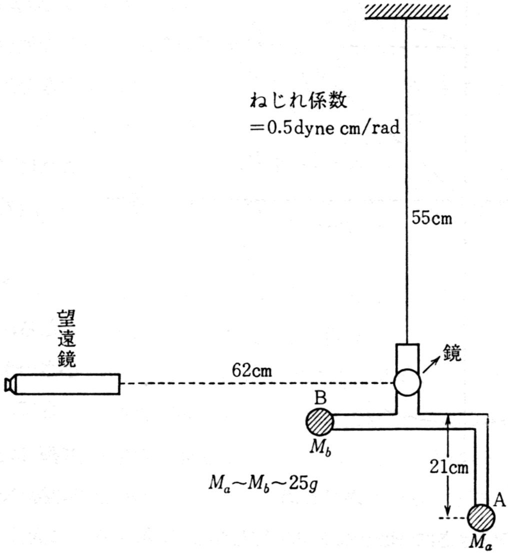
§ 42. Eötvös（エートベス）の実験

“弱い等価原理”，すなわち局所的には重力と慣性力とが区別できないということは，すべての物体に対してその重力質量 m_g と慣性質量 m_i の比 m_g/m_i が一定で，物質の種類や大きさなどに無関係であるということと同じである．

これを実験的に確かめた最も有名なものは Eötvös の実験である．Eötvös の考え方は本質的には次のことである．いま，A，B 2種類の物体が，それぞれ重力質量 M_a，M_b，慣性質量 m_a，m_b をもっているとする．もしも質量比

$$k_a = M_a/m_a, \qquad k_b = M_b/m_b$$

が A と B とでちがうならば，**第 12 図**のような **ねじれ秤** の両端に A, B を固定したときに A，B に働く力は平行でなくなる．というのは A に働く力は地域の引力と地球の自転による遠心力である．前者は M_a に，後者は m_a に比例する． それゆえ，$k_a \neq k_b$ ならば，A に働く 2 つの力の合力は B に働く同様な合力と平行でなくなるからである．Eötvös*) は第 12 図のように，A, B をつるすのに L 字形のものを使ったが，これはこの実験にとって，大切なことではない．そこで簡単のために A, B は長さが l の水平な棒の両端に固定されてあるものとする．



第 12 図

第 13 図のように A, B がいる地球上の点の緯度を φ，地球の自転の角速度を ω，地球の半径を R とすると，A に働く合力は

$$\vec{F}_a = \vec{e}_1 \cdot M_a \cdot g + \vec{e}_2 \cdot m_a \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot \omega^2 \tag{42.1}$$

となる．g は地球上の A のいる場所における重力の加速度．$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ は第 13 図のような単位ベクトルである．$\vec{F}_b$ についても同様な式が得られる．

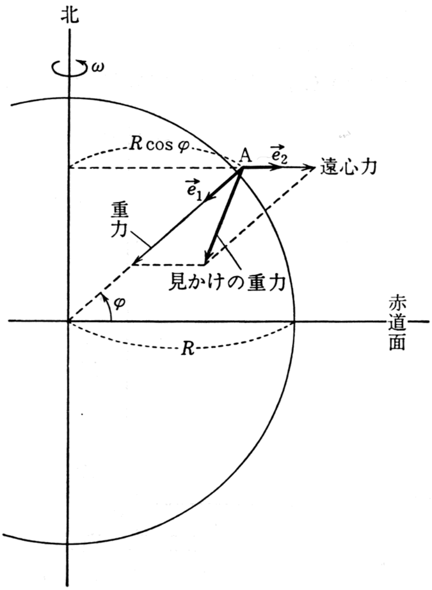
いま，A, B を結びつけてある棒の B から A に向う方向の単位ベクトルを $\vec{e}_3$ とすると，棒の中心に関する力のモーメントは

$$\vec{T} = \frac{l}{2}\vec{e}_3 \times (\vec{F}_a - \vec{F}_b) \tag{42.2}$$

*) R. V. Eötvös, D. Pekar and E. Fekete : Ann. Physik, **68** (1922) p. 11

一方，棒に働く全体の力は（つるした紐の張力はいれないことにする）

$$\vec{F}=\vec{F}_a+\vec{F}_b$$



第 13 図

棒をつるしている紐の方向は

$$\vec{F}/F$$

に平行であるから，紐を軸にして，この棒を回転させる力のモーメントは（天井から見おろしたときに時計の針のまわる向きを正として）

$$(\vec{T}\cdot\vec{F})/F$$

これに（42.1）（42.2）を代入すると

$$\frac{l\,(k_a-k_b)\cdot m_a m_b R\cdot\cos\varphi\cdot\omega^2}{(M_a+M_b)}\times\left((\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_3\right) \qquad (42.3)$$

となる．（42.3）の分母では，遠心力は小さいからはぶいた．

さて，第 13 図からわかるように，$\vec{e}_1\times\vec{e}_2$ は北半球では，A 点を通る子午面に垂直で A における真西の方向をさし，その大きさは $\sin\varphi$ である．したがって，棒を東西に向けて水平につるしたときは（42.3）は

$$\pm\frac{(k_a-k_b)\cdot l\cdot m_a\cdot m_b R\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\omega^2}{M_a+M_b}\quad\begin{pmatrix}+:\text{Aが西，Bが東}\\-:\text{Aが東，Bが西}\end{pmatrix}$$

となる．

（42.3）によってあたえられる力のモーメントが，紐の ねじれ のために紐の中に生じた反対向きのモーメントとちょうど打ち消すとき，棒は静止する．そこでいま，棒がちょうど東西に向いて静止するように，あらかじめ装置を調整しておく．次に，この全装置（紐をつるしている天井も一緒にして）を鉛直軸のまわりに 180° だけ回転させたとする．この場合，紐の中にある応力のモーメントは変わらない．しかし，A と B とはちょうど入れかわったために，棒にはたらくモーメントは前と逆になり，ちょうど紐のもつモーメントと同じ向きになる．そのため棒は紐を軸にして水平面で回転をはじめる．この回転角を鏡で拡大してしらべることにより，k_a-k_b が 0 かどうかをしらべることができる．

以上は地球の引力と地球の自転による遠心力について考えたが，地球が太陽のまわりを

公転することもまた考えに入れる必要がある．A，B に働く太陽の引力と，公転のための遠心力についても全く同じことがいえるが，ただ1つのちがいは，昼と夜とで AB の位置が太陽に対して逆になるということである．これは装置を 180° 回転させなくても，地球の自転で当然起こる現象である．このために，1日を周期として棒は回転運動（振動）をするはずである．

さて，この実験のむずかしい点は，この装置のまわりにおける重力場の非均一性が問題になる．人がそばに近づくとそれだけで棒は回転をはじめる．そのほかに温度変化，紐のねじれ係数のゆっくりした変化，ねじれ秤の材料のなかに含まれるわずかな磁性体におよぼす地磁気の影響，静電気力等，いろいろと実験のさまたげになるものが考えられる．

Eötvös, Pekar, Fekete ははじめ $k_a/k_b = 1 + \eta$ とおいて $\eta \sim 1.2 \times 10^{-6}$ という答を出したが，あとで重力の均一でないための影響をさしひいて $\eta \sim 2 \times 10^{-9}$ という答を出した．

この実験は重要な意義をもつので，その後もいろいろと精度を上げるくふうがなされた．特に Dicke およびプリンストン大学の一派は，もっとも進んだ装置をくふうした．棒の代わりに三角形の水晶で作った枠を水晶の糸でつるす．枠の三頂点には Au のおもりを2つと，Al のおもりを1つつるす．このような奇妙な形の装置は重力場の非均一性による影響をのぞくのに役立つ．また，全装置を真空の容器にいれ，これを地下の温度が一定，一様な所におさめた．これによって温度の影響，特に水晶糸のねじれ係数の変化を防いだ．そのほかできるかぎり，邪魔を防ぐくふうをした．その結果 Au の質量比を k_a，Al のそれを k_b とすると $k_a/k_b = 1 + \eta$ として $|\eta| \leq 3 \times 10^{-10}$ という答が出た．

さて，Eötvös の実験からいろいろと他の間接的な結論をひきだすことができる．たとえば，Dicke の実験によって Au と Al の原子核について，$|\eta| \lesssim 3 \times 10^{-10}$ であるとする．この実験結果から中性子や陽子，電子，またこれらの結合エネルギーについても精度は少し落ちるが，同様に両種の質量の一致を結論できる．

いま，一般に核Aの中性子の数を N_a，陽子の数を P_a，中性子，陽子の重力質量をそれぞれ $m_g{}^0$，$m_g{}^+$，また慣性質量を $m_i{}^0$，$m_i{}^+$ とする．核Bについても同様に N_b（中性子数），P_b（陽子数）とおくと，

$$\frac{k_{\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{B}}} \overset{d}{\equiv} \frac{(M_g/M_i)_{\mathrm{A}}}{(M_g/M_i)_{\mathrm{B}}} = \frac{\left(\dfrac{N_a \cdot m_g{}^0 + P_a m_g{}^+}{N_a \cdot m_i{}^0 + P_a m_i{}^+}\right)}{\left(\dfrac{N_b m_g{}^0 + P_b \cdot m_g{}^+}{N_b m_i{}^0 + P_b \cdot m_i{}^+}\right)} \overset{d}{\equiv} 1 + \eta$$

いま，$m_g{}^0/m_i{}^0 = k^0$，$m_g{}^+/m_i{}^+ = k^+$ とすると，これらはそれぞれ，中性子および陽

子の（重力質量）/（慣性質量）である．そこで

$$k^{+}/k^{0}=1+\zeta$$

とおくと，上の式から簡単な計算により

$$\eta=\left(\frac{\dfrac{P_a}{N_a}\cdot m_i{}^{+}}{m_i{}^{0}+\dfrac{P_a}{N_a}m_i{}^{+}}-\frac{\dfrac{P_b}{N_b}m_i{}^{+}}{m_i{}^{0}+\dfrac{P_b}{N_b}m_i{}^{+}}\right)\zeta$$

そこで，Aを Au，Bを Al とすると，陽子と中性子の個数比は

$$\frac{P_a}{N_a}=\frac{79}{118}\sim\frac{2}{3},\quad \frac{P_b}{N_b}=\frac{13}{14}\sim 1$$

また，近似的に $m_i{}^{0}\sim m_i{}^{+}$ とすると

$$\eta=-\frac{1}{10}\zeta$$

そこで，η に Dicke の実験値を代入すると

$$|\zeta|\lesssim 3\times 10^{-9}$$

つまり，核の場合より核子の方が，1桁だけ精度が落ちる．

同様な考え方から，電子と核子について

$$k_e/k^{0}=1+\zeta'$$

とすれば，$|\zeta'|\lesssim 10^{-6}$ となることがわかる．ただし，k_e，k^0 はそれぞれ電子および中性子の質量比である．

もしも核のなかにある中性子と陽子の個数比がはなはだしく異なる2つの核 A, B について Eötvös の実験をやれば，上述の ζ の値はもっと小さくできる．

Schiff*) は Eötvös の実験結果から，陽電子の質量比を推論した．いま1個の原子を考えよう．量子電気力学によれば，この核のまわりには，電子と陽子の対(つい)が発生したり消滅したりしている．この陰陽電子は平均において核のまわりに電気的偏極をひき起こす．それはちょうど，誘電体のなかに1個の真電荷をはめこんだ場合とよく似ている．この電子対の発生の割合は核の電荷の大きさ Z に関係する．ところで，いま電子は $m_g=m_i$ と仮定する．一方陽電子は重力質量が負であると仮定する．そうすると，核のまわりに多数の電子対が発生するほど，陽電子のために全体の両種の質量のちがいが大きくなる．そこで，原子番号のちがう核について，たとえば Au と Al についてこの Schiff の考えに基づいて計算すると（ただし陽電子の $m_g/m_i=-1$ とおく）$\eta\approx 3\times 10^{-7}$となる．こ

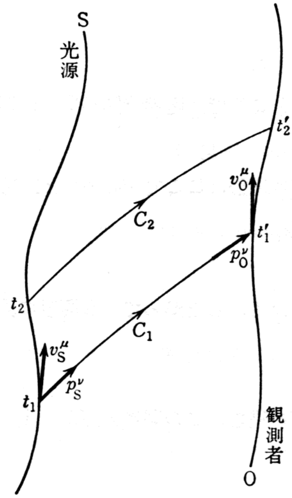
*) L. I. Shiff : Proc. Natn Acad. Sci. **45** (1959) p. 69

れは明らかに Eötvös の実験結果とくいちがう．それゆえ陽電子の重力質量は負ではあり得ない．

§ 43. 重力によるスペクトル線のずれ

話を簡単にするために静的重力場を考える．このときは適当に座標系を選べば，$g_{\mu\nu}$ はすべて時間変数 $x^0/c=t$ に無関係となる．さらに $g_{i0}=0$ ($i=1, 2, 3$) となるようにすることができる．このような例としては，たとえば Schwarzschild の外部解がある．

さて，**第 14 図**において S は光源の世界線，O は観測者の世界線とする．また，上述の座標系からみると，S も O も静止しているものとする．すなわち，S も O も世界線にそって，その空間座標 x^k ($k=1, 2, 3$) は一定と仮定する．



第 14 図

いま，光源から振動数 ν の光が発射されたとしよう．いうまでもないことだが，振動数とは光源の固有時間が 1 秒たつ間に光の振動する回数が ν であるということである．時刻 t_1 に S から発射された光は第 14 図の C_1 にそって時刻 t_1' に O に到達する．C_1 は光の世界線であるから，

$$g_{00}(dx^0)^2+\sum_{i,k=1}^{3}g_{ik}dx^i dx^k=0$$

が C_1 にそって成立する．そこで

$$t_1'-t_1=\int_{t_1}^{t_1'}dt=\frac{1}{c}\int_0^1\frac{\sqrt{\sum_{i,k}g_{ik}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}}}{\sqrt{-g_{00}}}d\lambda \tag{43.1}$$

となる．ここで λ は任意のパラメーターで，光線 C_1 の方程式は，この λ を使うと

$$x^\mu=x^\mu(\lambda)$$

のようになる．$\lambda=0$ とすると，それはSの上の出発点になり，$\lambda=1$ とすれば，Oの上の終点を示すものとする．(43.1) の右辺の積分は C_1 にそって行なう．

いま，時刻 t_1 から t_2 まで光をSから放射しつづけたとする．最後の光の進む世界線を C_2 とすると，(43.1) のような積分を C_2 にそって行なえば $t_2'-t_2$ が求められる．

ところで，静的場の仮定および S も O も静止しているために右辺の積分は x^0 に無関係になるので，C_1 にそって行なった積分と，C_2 にそった積分とは値が等しい．つまり

$$t_2' - t_2 = t_1' - t_1 = \frac{1}{c}\int_0^1 \left\{ \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\cdot\frac{dx^k}{d\lambda}} \Big/ \sqrt{-g_{00}} \right\} d\lambda$$

あるいは

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = T \tag{43.2}$$

となる．

ところで，座標時間が T だけ経過する間に，S の固有時間は

$$\tau_{\rm S} = \sqrt{-g_{00}({\rm S})}\cdot T$$

だけ進む．ここで $g_{00}({\rm S})$ とは光源のある場所の g_{00} の値を示す．同様に観測者の固有時間は

$$\tau_0 = \sqrt{-g_{00}({\rm O})}\cdot T$$

となる．したがって，観測者の固有時間 τ_0 が 1 秒経過する間に，光源の固有時間は

$$\tau_{\rm S} = \sqrt{\frac{g_{00}({\rm S})}{g_{00}({\rm O})}} \quad 秒$$

だけ進む．この間に光源から出る光の波の数は

$$\nu\cdot\tau_{\rm S} = \nu\sqrt{\frac{g_{00}({\rm S})}{g_{00}({\rm O})}} = \nu' \tag{43.3}$$

すなわち，観測者からみると，O の固有時間が 1 秒たつ間に S から ν' 個の波を受けとることになる．つまり，O からみると，S から出た光の振動数は見かけ上 ν' にみえる．ν' と ν との関係は

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{g_{00}({\rm S})}{g_{00}({\rm O})}} \tag{43.3$'$}$$

となる．

ところで，Newton の重力ポテンシャルを Φ とすると

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

であるから，$1 \gg |\Phi/c^2|$ のときには (43.3)′ は近似的に

$$\frac{\delta\nu}{\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{1}{c^2}\left\{\Phi({\rm S}) - \Phi({\rm O})\right\} \tag{43.4}$$

(43.4) は，ときに

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \quad ただし \quad v \overset{d}{\equiv} \frac{1}{c}\left\{\Phi({\rm S}) - \Phi({\rm O})\right\} \tag{43.4$'$}$$

と書くことがある．これは振動数の変化 $\delta\nu$ が仮に Doppler 効果によるものと考えたときに，これだけの $\delta\nu$ を引き起こすに必要な光源の速さ v は (43.4)′ であたえられるということである．この v は **equivalent velocity** と呼ばれる．

以上は特別な座標系を使ってだした結果である．一般の重力場のときに，ν'/ν は不変量を使って書き表わされる．それは

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{(g_{\mu\nu}v_{\mathrm{O}}{}^{\mu}p^{\nu})_{\mathrm{O}}}{(g_{\mu\nu}v_{\mathrm{S}}{}^{\mu}p^{\nu})_{\mathrm{S}}}$$

上の式で $v_{\mathrm{S}}{}^{\mu}$ および $v_{\mathrm{O}}{}^{\mu}$ は，それぞれ曲線 S および O が，光線 C_1 と交わる点における光源ならびに観測者の 4 元速度ベクトル（すなわち，曲線 S，および O の切線ベクトル）を示す．また，分子の p^{ν} は O と C_1 の交点における C_1 の切線ベクトルを示し，分母の p^{ν} は，S と C_1 の交点における C_1 の切線ベクトルである．この式は Schrödinger があたえたものである*)．

静的重力場で，しかも観測者も光源もこの重力場に対して静止している場合には，この式が (43.3)′ と一致することは次のように証明できる．まず，S も O も静止しているから，これらの固有時間 $d\tau$ は

$$ds=cd\tau=\sqrt{-g_{00}}\cdot dx^{0}\quad(\text{S にそって，または O にそって})$$

となる．

したがって

$$v_{\mathrm{O}}{}^{\mu}=\frac{dx_{\mathrm{O}}{}^{\mu}}{ds}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{-g_{00}(\mathrm{O})}} & :\mu=0\\ 0 & :\mu=1,2,3\end{cases}$$

$$v_{\mathrm{S}}{}^{\mu}=\frac{dx_{\mathrm{S}}{}^{\mu}}{ds}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{-g_{00}(\mathrm{S})}} & :\mu=0\\ 0 & :\mu=1,2,3\end{cases}$$

次に求めなければならないものは p^{μ} である．$g_{0k}=0\quad(k=1,2,3)$ であるから

$$(g_{\mu\nu}p^{\mu}v^{\nu})_{0}=(g_{00}(0)\cdot p^{0}\cdot v^{0})_{0}$$

さて，p^{μ} は光線の切線ベクトルであるから，測地線の方程式を満足する．すなわち，パラメーターを σ として

$$\frac{d}{d\sigma}p^{0}+\Gamma^{0}_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}=0,\quad p^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\sigma}.\ (\text{光線にそって})$$

ところが，光の世界線は Null－曲線，すなわち

---

*) E. Schrödinger : Expanding Universe, (1956) p. 49. Cambridge Univ. Press.

$$ds^2=\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)d\sigma^2=0$$

であるから，σ としては曲線の長さをとるわけにはいかない．そこで σ を次のように決める．まず，静的場の仮定から

$$\Gamma^0_{\mu\nu}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}g^{00}\partial_k g_{00} & (\mu=k=1,\ 2,\ 3,\ \nu=0)\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

したがって，測地線の方程式は

$$\frac{d}{d\sigma}p^0+g^{00}\partial_k g_{00}\cdot\frac{dx^k}{d\sigma}\cdot p^0=\frac{d}{d\sigma}p^0+\frac{1}{g_{00}}\cdot\frac{dg_{00}}{d\sigma}\cdot p^0=\frac{1}{g_{00}}\frac{d}{d\sigma}(g_{00}p^0)=0$$

そこで，これを積分して

$$g_{00}p^0=(C_1\ \text{にそって一定})=\alpha$$

とおく．これは，σ を決めることになる．

この結果を前に示した Schrödinger の式に代入すると

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{\alpha\{-g_{00}(\mathrm{O})\}^{-1/2}}{\alpha\{-g_{00}(\mathrm{S})\}^{-1/2}}=\sqrt{\frac{g_{00}(\mathrm{S})}{g_{00}(\mathrm{O})}}$$

つまり (43.3)′ となる．

a)　太陽および白色矮星からの光のスペクトルのずれ

上に求められた結果をまず太陽からの光線に応用してみよう．いま，仮に地球が太陽に対して相対的に静止しているとすると

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu}\overset{d}{\equiv}\frac{\delta\nu}{\nu}=\frac{1}{c^2}\left(-\frac{GM_\mathrm{S}}{R_\mathrm{S}}+\frac{GM_\mathrm{S}}{r}\right)\approx-\frac{GM_\mathrm{S}}{c^2R_\mathrm{S}}\approx-2.12\times10^{-6}\qquad(43.5)$$

となる．ここで R_S は太陽半径 $=6.95\times10^{10}$cm，M_S は太陽の質量 $=1.983\times10^{33}$g，また r は太陽の中心から地球までの距離を示す．実際は，r は地球のいる場所の座標値（動径座標）であるから，太陽と地球の間の距離と混同してはならない．しかし太陽のまわりの重力場 Φ は非常に小さい（すなわち $1\gg|\Phi/c^2|$）ので，実際には Minkowski 型の時空と考えてかまわない．それゆえ r を距離と同一視できる．

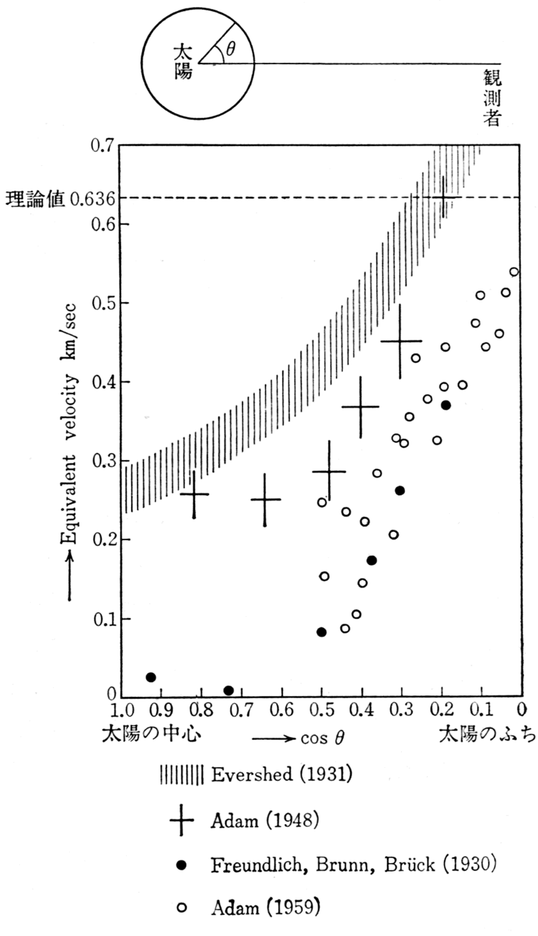
(43.5) からわかるように，地球上からみた振動数 ν' は太陽の表面における光の振動数よりも小さくなる*)．つまり，スペクトル線は赤い方にずれるので，これを**赤方変移**とも呼ぶ．

---

*)　ν は太陽の表面にある原子に固定した時計が1秒進む間に光の振動する回数である．ところで，強い等価原理にしたがえば，この原子は地上の原子と同じものである．したがって，ν は，地上の原子を使ったときのそれから出る光の振動数にほかならない．

さて，理論値（43.5）と実際の観測結果とを比較するとき，まず考えねばならぬことは，地球自身のつくる重力場の影響である．しかし，これによる $\delta\nu/\nu$ は（43.5）の 0.02% 程度のごく小さいものであるから，今の実験精度では無視してよい．それよりも大事なことは，地球と太陽の相対運動による Doppler 効果である．これは（43.5）に比べて無視できないものである．しかし，このような影響は計算によって補正できるから始末がよい．一番困ることは，写真に写ったスペクトル線がどれも幅をもっているので，どれだけずれたかを実測しにくいことである．

ともかく，実験結果は必ずしも理論値（43.5）とよく合っているとはいいにくい．たとえば地球からみたとき，太陽の中心部からくる光と，縁の部分からくる光とでは，$\delta\nu/\nu$（または波長になおして $\delta\lambda/\lambda$）が異なる．現在では，むしろ理論値(43.5)と実験結果のくいちがいを説明するために，いろいろの仮設が考えられている状態である（**第15図参照**）.



第 15 図

（43.5）からわかるように，$\delta\nu/\nu$をなるべく大きな値にさせるには，光源の半径はなるべく小さく，その質量はなるべく大きい方が望ましい．そこで，白色矮星は，この観点からみると非常に好都合な光源といえる．白色矮星の M は大体太陽と同じであるが，その半径は太陽半径の 1/10～1/100 であるからである．しかし，スペクトル線の ずれ をしらべるのに実際適している白色矮星としては，現在のところ２例し

かない．1つは Sirius の伴星（Sirius B）であり，他は Eridanus 星座のなかの1つ（40 Eridani B）である．後者については，"equivalent velocity" v は

$$v\,(\text{実験値}) = (21 \pm 3)\,\text{km/sec}, \qquad v\,(\text{理論値}) = (17 \pm 3)\,\text{km/sec}$$

これがスペクトル線のずれに就ての天文学的実験の内最も精度の高いものとされている．

b）γ－線の振動数のずれ

地球上で，重力のポテンシャルの場所による差が光の振動数におよぼす影響は，あまりにも小さすぎて観測することはむずかしい．ところが近年 Mössbauer の創案した方法によると，非常に小さな振動数の変化も観測ができるようになった．

Pound および Rebka は Fe^{57} の γ－線を使って地表と地上高さ $l = 22\,\text{m}$ の場所における振動数のちがいを Mössbauer の方法を使って実測した．いま，高さ l の場所で Fe^{57} から出た γ 線の振動数を ν_a とする．これが地表に到達したときに，地表の観測者が見た振動数を ν_b とすると，（43.4）から

$$\frac{\nu_b - \nu_a}{\nu_a} = \frac{1}{c^2}(\Phi(a) - \Phi(b)) \tag{43.6}$$

$\Phi(b) = 0$,　$\Phi(a) = g \cdot l$,　g は地上での重力の加速度である．そこで

$$\frac{\delta\nu}{\nu_a} = \frac{\nu_b - \nu_a}{\nu_a} = \frac{gl}{c^2} = 2.5 \times 10^{-15}\ (\text{理論値}) \tag{43.6$'$}$$

となる．この実験では（実験値)/(理論値）$= 1.05 \pm 0.10$ となった．これはスペクトル線のずれに対する最も精度のよい実験である．

さて，いままで述べたスペクトル線のずれは，Einstein や Schiff[*] が指摘したように，特殊相対論と等価原理だけから導き出すことができる．

いま，Pound および Rebka の実験を考えてみよう．まず全く同じ構造をした3個の原子時計を用意する．このなかの1個は地上，高さ l の点Aに，他の1個は，地表で，Aからくる γ－線を受ける地点Bに固定する．つぎに1個の箱をAからBに向って自由落下させる．この箱の中に1つの局所慣性系を設け，その空間座標軸の原点Cに，残りの1個の時計を固定する．γ－線がAから放射される瞬間に箱は自由落下をはじめるものとし，それまでは，CはAに対して相対的に静止しているものとする．

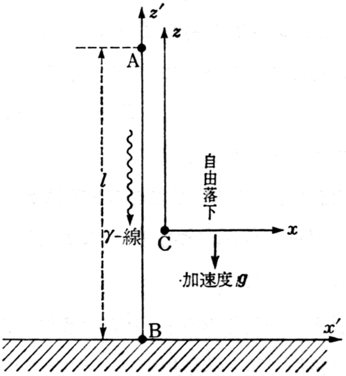
弱い等価原理によれば，Cから眺めたとき，その近所では地球の重力は消去されているから，特殊相対論を適用してかまわない．ところで，Pound と Rebka の実験は，これ

---

*) A. Einstein : Ann. D. Phys., (4), **35** (1931) p. 898
L. I. Schiff : Am. J. Phys., **28** (1960) p. 340

をCから眺めれば，静止している光源A（放射の瞬間にはAは静止していることに注意）から放出された光を，光源に接近しつつある観測者Bから観測した場合のDoppler現象にほかならない.

いま**第16図**のようにBから垂直上向きに z' 軸を設ける．またBに固定された原子時計で測った時間を t'（または $x^{0'}=ct'$）とする．一方局所系Cを基準にした座標を，図のように，z，t（または $x^0=ct$）とする．Cから眺めて，γ-線がAから放出された時刻を $x^0=0$ とすれば，それがBに到達した時の時刻は $t=l/c$ である．Cからみれば，Bは光源に向って近づきつつあるのだから，γ-線がBに到達するまでの所要時間は，実際には l/c より少ないが，そのちがいは，Bの上昇速度を v としたとき，$\beta=v/c$ について1次だけ高次になるからそれを無視した.



第 16 図

γ-線がBに到達した瞬間には，Bの上昇速度（Cからみた値）は $v=g\cdot l/c$ である．そこでこの瞬間におけるB系（すなわち $x^{0'}$, z'-系）とC系（x^0, z-系）との間の関係は，つぎのようなLorentz変換式であたえられる：

$$x^{0'}=\frac{x^0-\beta z}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad z'=\frac{z-\beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta=v/c=gl/c^2 \tag{43.7}$$

さてCの時計で測った γ-線の振動数を ν_a（これは放出の瞬間にAの時計で測った振動数に等しい），その波長を $\lambda_a=c/\nu_a$ とする．一方，この γ-線がBに到達した瞬間に，Bの時計で測った振動数を ν_b，波長を $\lambda_b=c/\nu_b$ とする．ところで特殊相対論によれば，振動数と波数ベクトルは1つの4元ベクトル k^μ としてLorentz変換をこうむる．唯今の γ-線に対しては

$k^0=\nu_a \quad k^1=k^2=0 \quad k^3=-c/\lambda_a$ （C-系からみた場合）

$k^{0'}=\nu_b \quad k^{1'}=k^{2'}=0 \quad k^{3'}=-c/\lambda_b$ （到着の瞬間にB-系からみた場合）

k^μ と $k^{\mu'}$ とは（43.7）によって結ばれているから，

$$k^{0'}=\nu_b=\frac{\nu_a-\beta(-c/\lambda_a)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\nu_a\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\approx\nu_a(1+\beta)=\nu_a\left(1+\frac{gl}{c^2}\right) \tag{43.8}$$

すなわち

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_a} \overset{d}{\equiv} \frac{\nu_b - \nu_a}{\nu_a} = \frac{gl}{c^2}$$

これは (43.6)′ にほかならない.

いま Planck の定数 h を使って $E_a = h\nu_a$, $E_b = h\nu_b$ とおけば, これらはそれぞれ C (または $t=0$ の瞬間に A), および B から眺めたときの γ-線光子のエネルギーである. そこで (43.8) に h をかけると

$$E_b = E_a + m_a \cdot gl, \qquad m_a = E_a/c^2 \tag{43.9}$$

となる. m_a は A からみたときの γ-線の慣性質量と考えてよい. したがって等価原理によれば, (43.9) の右辺第2項は γ-線が地上 l の地点でもつ重力的ポテンシャル・エネルギーである. つまり (43.9) は, 重力場のなかにある γ-線のエネルギーの保存則にほかならない.

以上の証明をみると, 次のようにいえる. まずこの証明に使われた2つの原理, すなわち特殊相対論と等価原理は, すでに実験的に証明ずみである. したがって, スペクトル線の ずれ を, あらためて実験的にしらべることは無駄のようにみえる. これに対して Dicke は強く反対した. すなわち, 上の証明に使った等価原理は, 実は“強い等価原理”である. たとえば上の証明で, Fe^{57} を B から A までもちあげる間に, その構造とか, 結合定数等に変化のないことが根本仮定として使われている. また上の証明法を太陽光線の振動数の ずれ に応用しようとすれば, なおさら強い原理が必要である. 太陽表面の水素原子と, 地上のそれとが同じものであるということは仮定としてつかわれている. Eötvös の実験は“弱い原理”の証明であって, このような仮定の実証にはなっていない. これが Dicke の反論の要旨である. いずれにしてもスペクトル線の ずれ を理論的に導くには Einstein の全理論を使う必要がないことだけは確かである.

§ 44. 重力による光の彎曲

静的重力場のなかでの光の彎曲は, 空間が見かけ上, 屈折率 $n(>1)$ をもっているためであると解釈できる. いま静的球対称重力場を考えよう. この $g_{\mu\nu}$ は次の式であたえられる (§ 21. の(21.14)参照).

$$ds^2 = \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^4 \{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\} - \left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{2}}{1+\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2 (dx^0)^2 \tag{44.1}$$

ここで

$$\alpha = \frac{GM}{c^2 r}, \qquad r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$$

である．M は重力の源の物体の質量である．

この重力場のなかを進む光の世界線は (44.1) の ds を

$$ds = 0$$

とおけばよい．この式から，この座標系からみたときの光の速さは

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

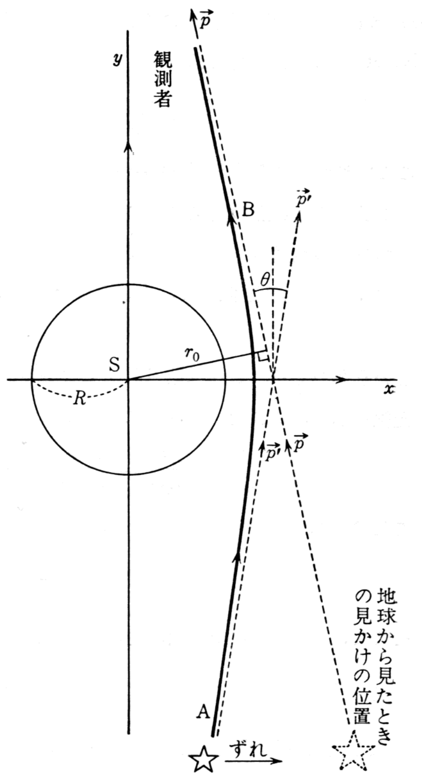
$$= c\frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^3}$$

となる．したがって，屈折率 n は

$$n(r) \stackrel{d}{\equiv} \frac{c}{v} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^3}{1 - \frac{\alpha}{2}} \approx 1 + 2\alpha$$

$$= 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \qquad (44.2)$$

この屈折率を使って幾何光学の Fermat の原理にしたがって光線の屈折角を計算してみる．いま遠方の恒星からきた光 A が太陽 S の重力場の中を通過するとき角 θ だけ屈折して B の方向に出ていくとすると（**第 17 図**）



第 17 図

$$\theta \approx 4\alpha = \frac{4GM}{c^2 r_0} \qquad (44.3)$$

ここで r_0 は太陽の中心から光の漸近線（第 17 図の点線）までの距離を示す．これに太陽の質量 M，r_0 として太陽の半径を用いれば，(43.5) を使って，

$$\theta = 8.48 \times 10^{-6}\ (\text{rad}) = 1.75''$$

となる．これは太陽のふちをすれすれに通過した光の屈折角である．同様に木星の場合

には $\theta=0.02''$ となる.

なお，上の計算では3次元空間はユークリッド的であるとして計算したが，これが許されるのは前にも述べたように，(44.1) の α が1に比べて非常に小さいからである.

(44.3) に似た結果は Newton の力学を使っても導き出せる．いま光線の代わりに質量 m の質点が太陽のまわりの重力場の中で運動をしているとしよう．その運動方程式は Newton の重力理論では

$$m_i\frac{d^2x}{dt^2}=-GM\cdot m_g\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{44.4}$$

ここで等価原理を使えば $m_i=m_g=m$ であるから両辺から質点の質量はとり除かれる．したがって，質点の質量に関係なく，その軌道は同じである．そこで $m\to 0$ の極限，すなわち光の軌道も (44.4) で表わされるものとする.

(44.4) の第0近似して，右辺を0とおけば

$$y=ct, \qquad x=R$$

という解がある．これは第 17 図で太陽の ふち をかすめて下から上に y 軸に平行に走る光線を示す．これを (44.4) に代入すると

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d^2x}{c^2dt^2}=-\frac{GM}{c^2}\,\frac{R}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

これの解は

$$x=R-\frac{GM}{c^2R}\sqrt{R^2+y^2}$$

そこで，$y\to\pm\infty$ では漸近的に2本の直線

$$x\approx-\frac{GM}{c^2R}|y|$$

となる（第 17 図の点線)．したがって

$$\frac{\theta}{2}\approx\tan\frac{\theta}{2}=\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{GM}{c^2R}, \qquad \theta\approx\frac{2GM}{c^2R}$$

この θ は (44.3) のちょうど半分になっている.

(44.3) の θ も一般の場合に，不変量の形式で書ける．すなわち

$$\cos\theta=1+\frac{(p_\mu p^{\mu\prime})}{(p_\mu v^\mu)\,(p_\mu{}'v^\mu)} \tag{44.5}$$

右辺に出てくる量は次のようなものである．いま，太陽のある場合と，なかった場合とを考える．太陽のなかったときは時空は平坦，すなわち Minkowski 空間とする．観測者は太陽から十分はなれた所（したがって，そこは太陽があったとしても Minkowski 空間と

考えてよい）にいるものとする．したがってその世界線は直線と考えられる．その4元速度ベクトルを $v^\mu = dx^\mu/ds$（s は世界線の長さ）とする．遠方の星から来る光の世界線をC（太陽のあるとき），C′（ないとき）として，C，C′ が観測者の世界線と交わる点における光線の切線ベクトルが p_μ，$p_\mu{}'$ である．

（44.5）を本節のはじめに考えた場合に応用してみよう．観測者は静止しているから

$$v^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \approx 1 \quad v^k = 0, \quad (k = 1, 2, 3)$$

$p^\mu p^{\mu\prime}$ は共にゼロベクトルであるから，

$$p^{\mu\prime} = (p^0 = p, \ \vec{p}), \qquad p^{\mu\prime} = (p^{0\prime} = p', \ \vec{p}')$$

$$p = |\vec{p}|, \qquad p' = |\vec{p}'|$$

また，**第 17 図**から明らかなように

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}') = p \cdot p' \cdot \cos\theta$$

そこで

$$1 + \frac{(p_\mu p^{\mu\prime})}{(p_\mu v^\mu)(p_\mu{}' v^\mu)} = 1 + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{p}') - p \cdot p'}{p \cdot p'} = 1 + (\cos\theta - 1) = \cos\theta$$

すなわち，右辺の量は確かに $\cos\theta$ をあたえる．

最後に Schiff の考えを紹介する．すなわち，（44.1）のような Einstein の重力場の方程式の解を使わないでも，等価原理と特殊相対論，特に長さの収縮と時計のおくれを考えれば，屈折率（44.2）が導きだされることが Schiff により示された．（p. 176 **脚注**）

実験との比較

この実験は，日蝕の際に太陽のまわりに見える星の写真をとり，それから半年後に，太陽のいない場合に同じ星の写真をとり，両者を比べて前の写真の星が後者に比べて，どれだけずれているかをしらべるわけである．この実験のめんどうな点をあげれば，

（i） 日蝕のために地球の大気の温度が部分的に下がり，そのため大気による光線の屈折が起きる．

（ii） 太陽のコロナによる屈折

（iii） 観測用の光学機械，特に鏡が日蝕のあいだの温度変化によってひずむこと

等が考えられる．しかし一番難かしい問題は，半年をへだててとった2枚の写真を比較する際に，両者のスケールを完全にそろえることである．この困難のために，なかなかはっきりした結論をだすことは難かしい．結果を一覧表にしたものが**第1表**である．

これらの観測のなかで 1922 年の Campbell と Trumpler の結果，および 1929 年の Freundlich，Klüber，Brunn の結果が一番無難とされている．

第1表 太陽重力場による光線の屈折の観測結果

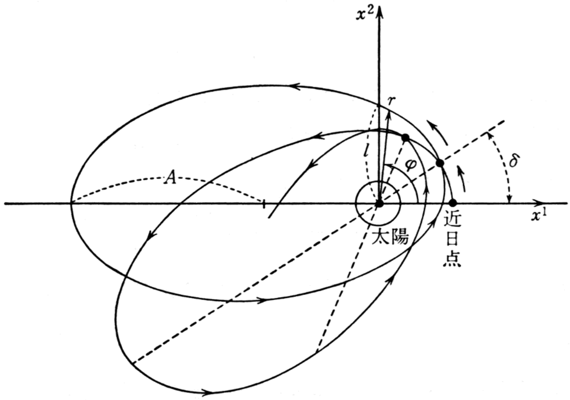
日蝕	観測した星の個数	屈折角 θ (秒)	観測者
1919	7	1.98 ± 0.12	Dyson, Eddington, Davidson
同上	5	1.61 ± 0.30	同上
1922	92	1.72 ± 0.11	Campbell, Trumpler
同上	145	1.82 ± 0.15	同上
1922	14	$1.18 \sim 2.35$	Dodwell, Davidson
1922	18	$1.42 \sim 2.16$	Chant, Young
1929	17	2.24 ± 0.10	Freundlich, Klüber, Brunn
1936	25	2.71 ± 0.26	Mikhailov
1936	8	$1.28 \sim 2.13$	松隈
1947	51	2.01 ± 0.27	Beisbroeck
1952	10	1.70 ± 0.10	同上
理論値		1.75	

要するにこれらの実験結果を総合すると，理論から予想されるように，太陽のいる場合には，星は見かけ上太陽の中心から遠ざかるように写真にうつっている（**第 17 図参照**）．ところで，ずれの角度は（44.3）によれば，太陽からの距離 r に反比例する．観測結果は，定性的にはこの $1/r$ の法則に反しないが，定量的には理論との一致はよくない．しかしどの実測値も Newton 力学による答 $1.75''/2 = 0.875''$ を支持するものはない．

§45. 近日点の移動

これから一般相対論の実験的検証のなかで最も重要な意味をもつもの，すなわち遊星の近日点の移動について述べる．太陽のまわりを公転する遊星は，Newton 力学によれば楕円軌道をえがく．この軌道の上で，遊星が太陽にもっとも近づく点が **近日点** である．もし太陽と1個の遊星だけがあって，Newton の万有引力の法則が成立するならば，この近日点は移動しない．しかし太陽のまわりには多くの遊星が公転しているので，遊星同士のあいだの相互作用を摂動として考えにいれると，Newton 力学においても，軌道は完全な楕円とならず，**第 18 図**のようにその長軸は少しずつ移動する．この理論の結果を実測値とくらべるのには，実はもっと大きな要素を忘れてはならない．すなわち，われわれが

近日点の移動を観測するときに普通用いる基準系は，太陽と地球の春分点を結ぶ直線を基準にとる．ところが，この軸の方向がやはり歳差運動をするのであるから，これによる見



第 18 図

かけの移動量を補正する必要がある．このような補正を行なっても，なお理論値と実測値のあいだにはごくわずかなくいちがいが残る．Einstein の一般相対論が世に出るまでは，この小さなくいちがいが多くの天文学者を悩ませた．

このくいちがいを説明するのには，Einstein の全理論，すなわち重力場の方程式と，重力場のなかにある質点（遊星）の運動方程式の両方が必要である．しかも重力場は Newton 的近似，つまり線型近似でなく， Einstein の場の方程式の非線型という特徴が重要な役割をする．そこでまず，一般相対論による近日点の移動の説明をしよう．

いま，太陽が座標原点に静止しているとする．そのまわりの静的．球対称な重力場を考えよう．もし，空間的に無限の遠方で，重力ポテンシャルが 0 となって， Minkowski 型の時空になるという境界条件をつければ，$g_{\mu\nu}$ は（座標変換による見かけのちがいを無視すれば）決まってしまう（§ 21 参照）．ここでは計算に好つごうなように次の形の ds^2 を考える．

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2 + \frac{a}{r^2(r-a)}\{\sum_{k=1}^{3} x^k\cdot dx^k\}^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 \qquad (45.1)$$

ここで

$$r = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}, \qquad a = \frac{2G\cdot M}{c^2}$$

$g_{\mu\nu}$ は次のようになる．

$$g_{ik}=\delta_{ik}+\frac{a}{r^2(r-a)}x^ix^k$$

$$g_{00}=-\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

$$g_{0i}=0.\quad (i,k=1,2,3)$$

Mは太陽の質量である．これは（24.12），（24.18）にあたえられているもので，Schwarzschild の解に適当に座標変換を行なえば出てくる．この解（Schwarzschild のときも同じことがいえる）の大切な点は $r\to\infty$ で

$$g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}+0\left(\frac{1}{r}\right) \tag{45.2}$$

となることである．（45.1）よりも Schwarzschild の解（21.10）の方が簡単でよさそうであるが，$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を計算するには（45.1）の方が好つごうであるからこれを用いた．要するに，孤立系で球対称で，（45.2）を満足していれば，途中の計算の難易のちがいはあっても答は同じになる．

さて，上の g_{ik} の逆は

$$g^{ik}=\left(\delta_{ik}-\frac{a}{r^3}x^ix^k\right)$$

$$g^{i0}=0$$

$$g^{00}=-1/\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

これらを使って，アフィン係数 Γ を計算すると，0でないものは

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^0_{0k}&=\frac{a\cdot x^k}{2r^2(r-a)}\\
\Gamma^k_{00}&=\frac{a}{2r^3}\left(1-\frac{a}{r}\right)x^k\\
\Gamma^k_{il}&=\left\{\frac{a}{r^3}\delta_{il}-\frac{a(3r-2a)}{2r^5(r-a)}x^ix^l\right\}x^k
\end{aligned}\right\} \tag{45.3}$$

$$(i,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3)$$

となる．

さて，太陽のまわりをまわる遊星の軌道を求めるには，測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0 \tag{45.4}$$

に（45.3）を代入すればよい．τ は遊星の固有時間である．

そこで，μの代わりに $k=1,2,3$ とすると，（45.4）は

$$-\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=\Gamma^k_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+\sum_{i\cdot l=1}^{3}\Gamma^k_{il}\frac{dx^i}{d\tau}\cdot\frac{dx^l}{d\tau}$$

$$=\frac{x^k}{2r^3}\left[a\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+2a\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2-\frac{a(3r-2a)}{r-a}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\right]$$

となる．すなわち，

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2}:\frac{d^2x^2}{d\tau^2}:\frac{d^2x^3}{d\tau^2}=x^1:x^2:x^3 \tag{45.5}$$

となる．そこで，$\tau=0$ の瞬間に座標軸の方向を決めるときに $x^3=dx^3/d\tau=0$ となるようにしておけば，任意の $\tau>0$ について常に

$$x^3(\tau)=0$$

となる．

また，(45.5) から

$$x^1\frac{d^2x^2}{d\tau^2}-x^2\cdot\frac{d^2x^1}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left(x^1\frac{dx^2}{d\tau}-x^2\frac{dx^1}{d\tau}\right)=0$$

となるから

$$x^1=r\cos\varphi, \qquad x^2=r\sin\varphi$$

とおけば

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau}=\alpha=\text{一定} \tag{45.6}$$

となる．これは Newton 力学の面積速度が一定という法則に対応する*⁾．

(45.4) の $\mu=0$ とおくと

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2}+\sum_{k=1}^{3}2\Gamma^0_{0k}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}=\frac{d^2x^0}{d\tau^2}+\frac{1}{g_{00}}\frac{dg_{00}}{d\tau}\cdot\frac{dx^0}{d\tau}$$

$$=\frac{1}{g_{00}}\frac{d}{d\tau}\left(g_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\right)=0$$

すなわち

$$g_{00}\frac{dx^0}{d\tau}=\beta=\text{一定} \tag{45.7}$$

さて，τ は固有時間であるから，

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}=-c^2$$

---

*⁾ 近似的には (45.6) は面積速度といえるが，厳密には，$r^2d\varphi$ は固有時間 $\Delta\tau$ のあいだに質点の動径が通り過ぎた面積とはいえない．

これに $x^3=0$ を代入し，(45.7) を使って $dx^0/d\tau$ を消去すると，

$$-c^2=\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2+\frac{a}{r^2(r-a)}\left(r\frac{dr}{d\tau}\right)^2-\frac{\beta^2}{1-\dfrac{a}{r}}$$

両辺に $\left(1-\dfrac{a}{r}\right)$ を掛けると

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2-\frac{ac^2}{r}-ar\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=\beta^2-c^2 \tag{45.8}$$

一方，Newton 力学で，遊星の質量を 1 としたときの全エネルギーの式は

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right\}-\frac{GM}{r}=E \tag{45.8$'$}$$

$ac^2=2GM$ であることを使うと，(45.8) の左辺の最後の項が Newton の式と違う点である．この最後の項と左辺の第 2 項と比べると

$$\frac{(\text{第 2 項})}{(\text{第 4 項})}=\frac{r}{a}$$

a は § 21 でも述べたように $a\approx 3\,\mathrm{km}$，r として仮に太陽半径 $=7\times10^5\,\mathrm{km}$ を使っても $r/a=2.3\times10^5$ という大きな数である．つまり第 4 項は無視してよいほど小さい．したがって，Newton の式 (45.8)′ は非常によい近似式であるといえる．そこで，(45.8) の右辺の β の代わりに新しい定数 E を使って

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2-\frac{ac^2}{r}-ar\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=2E\overset{d}{\equiv}\beta^2-c^2 \tag{45.8$''$}$$

とおく．

あるいは，(45.6) を使って τ の微分を φ の微分に書き直すと

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{ac^2}{\alpha^2}u-\frac{2E}{\alpha^2}=au^3 \tag{45.9}$$

となる．ここで $u=1/r$ とおいた．この右辺 $=0$ としたものは Newton の式にほかならない．

Newton の方程式の解は，2 次曲線の式

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{l}(1+e\cos\varphi)$$

の形をしている．そこで，(45.9) の解も Newton の解とあまり違わないと予想されるから

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{l}(1+e\cos\eta\varphi) \tag{45.10}$$

とおいてみる. ηは大体1に近い未知の定数で，これを（45.9）から決めてみよう.

（45.10）を（45.9）に代入すると

$$\frac{e^2}{l^2}\eta^2(1-\cos^2\eta\varphi)+\frac{1}{l^2}(1+e\cos\eta\varphi)^2-\frac{ac^2}{\alpha^2 l}(1+e\cos\eta\varphi)-\frac{2E}{\alpha^2}$$

$$=\frac{a}{l^3}(1+3e\cos\eta\varphi+3e^2\cdot\cos^2\eta\varphi)$$

右辺の $e\cos(\eta\varphi)$ の3乗の項はeが小さい数であるから無視した. この両辺の定数項，$\cos\eta\varphi$，$\cos^2\eta\varphi$ の係数を比較すると

$$\frac{e^2}{l^2}\eta^2+\frac{1}{l^2}-\frac{ac^2}{\alpha^2 l}-\frac{2E}{\alpha^2}=\frac{a}{l^3} \tag{45.11}$$

$$\frac{2e}{l^2}-\frac{ac^2}{\alpha^2 l}e=\frac{3ae}{l^3} \tag{45.12}$$

$$-\frac{e^2}{l^2}\eta^2+\frac{e^2}{l^2}=\frac{3ae^2}{l^3} \tag{45.13}$$

まず（45.12）は

$$\frac{a}{l}-\frac{a^2c^2}{2\alpha^2}=\frac{3a^2}{2l^2}$$

とも書ける. ところで，**第 18 図**からわかるように $a/l\ll 1$ であるから，上の右辺は無視すると，

$$l=\frac{2\alpha^2}{ac^2} \tag{45.14}$$

これは Newton 力学の結果と同じである. また，（45.13）から

$$-\eta^2+1=\frac{3a}{l}$$

（45.14）を使って

$$\eta=\sqrt{1-\frac{3a^2c^2}{2\alpha^2}}\approx 1-\frac{3a^2c^2}{4\alpha^2} \tag{45.15}$$

最後に（45.11）に（45.14）を代入すると

$$e^2\eta^2=1+\frac{2E}{\alpha^2}l^2+\frac{a}{l}$$

$1\gg\dfrac{a}{l}$ であるから，ηを1とおき a/l を無視すると

$$e^2=1+\frac{2E}{\alpha^2}l^2=1+\frac{8E\alpha^2}{a^2c^4} \tag{45.16}$$

これも Newton 力学の結果と同じである.

さて，(45.10) から近日点，すなわち r が最小になる点は

$$\eta\varphi = 2\pi\cdot n \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

そこで，太陽を一周して，再び近日点に帰るためには，遊星は

$$\eta\varphi_0 = 2\pi, \qquad \text{すなわち} \qquad \varphi_0 = \frac{2\pi}{\eta} \cong 2\pi\left(1 + \frac{3a^2c^2}{4\alpha^2}\right) \overset{d}{\equiv} 2\pi + \delta$$

だけ回転しなければならない．すなわち，近日点の進みは1公転に対して

$$\frac{\delta}{2\pi} \overset{d}{\equiv} \frac{\varphi_0 - 2\pi}{2\pi} = \frac{3a^2c^2}{4\alpha^2} = \frac{3GM}{c^2A\sqrt{1-e^2}} \tag{45.17}$$

となる．ここで A は遊星の楕円軌道の長軸の半分，e はその離心率を示す．

(45.17) からわかるように，なるべく δ が大きいためには e が大きいもの，A が小さいものが望ましい．そこで，一番適当なものは水星，つづいて金星と地球ということになる．

第2表は Duncombe*) のあたえたものである．この第1行目の $e\delta$（理）とは Newton 力学を使って計算した他の遊星からの摂動と，前に述べた観測系の歳差運動によるものを一緒にした量の 100 年間の累計である．第2行目の $e\delta$（実）とは，100 年間にわたっての $e\delta$ の観測値の累計である．第3行目は上の2つの差で，もし Newton の法則が正しいならば，これはほとんど0となるべきものである．第4行目は一般相対論を使って計算した $e\delta$ の 100 年間の累計である．第5，6は，第3，第4を e で割算したものである．

第2表　遊星の近日点移動（Duncombe による）

単位：秒/年	水　　星	金　　星	地　　球
$e\delta$(理)	1142.730 ± 0.040	34.472 ± 0.006	103.520 ± 0.004
$e\delta$(実)	1151.593 ± 0.084	34.529 ± 0.032	103.604 ± 0.020
$e\delta$(実) − $e\delta$(理)	8.863 ± 0.093	0.057 ± 0.033	0.084 ± 0.020
$e\delta$(相対論)	8.847	0.059	0.064
δ(実) − δ(理)	43.11 ± 0.45	8.4 ± 4.8	5.0 ± 1.2
δ(相対論)	43.03	8.6	3.8

（記号の意味は本文に説明がある）

この表をみると，一般相対論による計算結果は，実測値とよく一致しているといってよいであろう．なお，観測系の歳差運動は，地球の赤道面と太陽のまわりをまわるときの公転面との交線（この交線上に太陽がいるときが春分である）の向きが，遠方の恒星に対し

*) R. L. Duncombe : Astron. J. **61** (1956) p. 174

てどれだけ変化するかによって決まる．これは 100 年間に 5025.″645 ± 0.050/100 年という大きな値（相対論の効果に比べて）である．

ここで，ついでに前節で述べた光の屈折について述べよう．いま，遊星の代わりに光線の進路を考えてみよう．この場合には，固有時間 τ を使えないから，適当なパラメターを σ として（これは任意でよい，ただ光線の世界線を $x^\mu = x^\mu(\sigma)$ のように表わすことができればよい）測地線の方程式を書くと

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0$$

また，質点の場合とちがって

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \qquad (45.18)$$

となる．

そこで，質点の場合と同じように $x^3 = 0$ は成立する．また，(45.6) も成り立つことはすぐにわかる．さらに (45.7)

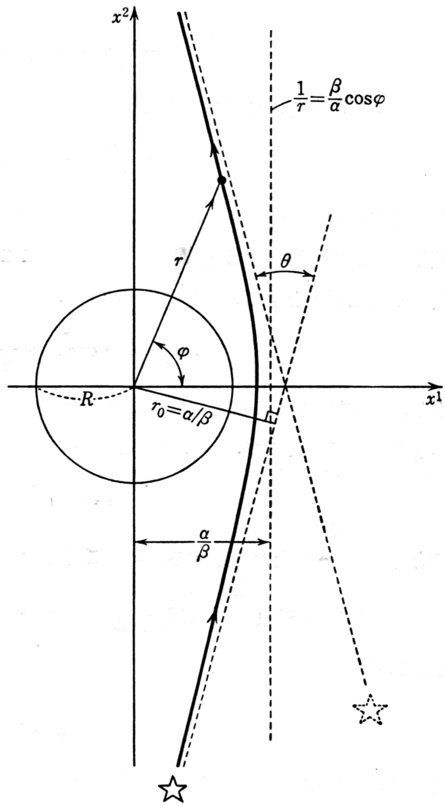
$$g_{00}\frac{dx^0}{d\sigma} = \beta = 一定 \qquad (45.19)$$

も成立する．ここで，たとえば $\beta = 1$ とおくことにより，パラメーター σ が，この式で決められる．そこで，前と同様に (45.19) を (45.18) に代入し，さらに (45.6) を使うと，光の軌道の方程式は

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = au^3 \qquad (45.20)$$

となる．ここで $u = 1/r$ である．この式は (45.9) に相当する．

もし，右辺 $= 0$ とおけば



第 19 図

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\beta}{\alpha}\cos\varphi$$

という解がある．これは **第 19 図** の点線で示された直線になる．

そこで近似を進めて，未知関数 $\chi(\varphi)$ を使って

$$u=\frac{\beta}{\alpha}\cos\varphi+\chi(\varphi)$$

とおく．このχは第1項に比べて小さいものとして，χの2次以上は無視すれば，(45.20) は次のようになる．

$$-2\frac{\beta}{\alpha}\sin\varphi\cdot\frac{d\chi}{d\varphi}+2\frac{\beta}{\alpha}\cos\varphi\cdot\chi=\frac{\beta^3}{\alpha^3}a\cos^3\varphi$$

(45.20) の右辺のuには第0近似 $u=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\cos\varphi$ を代入した．上式の左辺は

$$-2\frac{\beta}{\alpha}\sin^2\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\chi}{\sin\varphi}\right)$$

となるから，すぐに積分ができて

$$\chi=\frac{a\beta^2}{2\alpha^2}(1+\sin^2\varphi)+B\sin\varphi$$

Bは未定の積分定数である．いま，$u=1/r$ がφについて偶関数，すなわち**第 19 図**で横軸に対して対称とすると $B=0$ となる．ここで$\alpha/\beta=r_0=$(光線の漸近線と太陽との間の垂直距離）とすると（第 19 図参照），

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos\varphi+\frac{a}{2r_0{}^2}(1+\sin^2\varphi) \qquad (45.21)$$

もし，(45.21)の右辺の第2項がなければ$r\to\infty$，すなわち$u\to 0$ となるのは$\varphi=\pm\pi/2$ のときである．そこで，(45.21) において

$$\varphi=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

のときに $u\to 0$ となるとする．θはごく小さいとすると

$$0=\frac{1}{r_0}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\frac{a}{2r_0{}^2}\left\{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}\approx-\frac{\theta}{2r_0}+\frac{a}{r_0{}^2}$$

すなわち

$$\theta=\frac{2a}{r_0}=\frac{4GM}{r_0c^2}$$

となる．これは (44.3) にほかならない．

最後に，一般相対論によらないで，この近日点の異常な移動を説明しようとする興味ある試みを紹介しよう．この試みは2つに大別できる．すなわち，1つは太陽系にまだ知らない物体があって，それがもとで移動が起きるという考えと，もう1つは Newton の引力の法則とはちがった力の法則を仮定するものである．この第1の考えでは，たとえば太陽と水星の間にまだ遊星があるとする仮定，また太陽が偏平であるということ，それから

太陽のまわりの ほこり等が考えられる.

第2の試みとして，たとえば力が

$$\vec{F} = -m\cdot f(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad m = \text{遊星の質量}$$

であるとする. このときの近日点の移動量は

$$\frac{\delta}{2\pi} = -\left[1 + \frac{a}{2}\,\frac{f'(a)}{f(a)}\right]$$

Newton の力は

$$f \propto r^{-2}$$

である. このときは確かに $\delta = 0$ となる. しかし $f \propto r^{-(2+\Delta)}$ としても，上のような簡単な形の力では，実験をすべて説明するわけにはいかない. そこでもっと一般的に考えて，$\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ をパラメーターとして

$$\vec{F} = Gm\cdot M\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\alpha + 2\beta\cdot\frac{(\vec{v})^2}{c^2} - 3\gamma\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Big/c^2\right]$$
$$-2\lambda\frac{GmM}{c^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{v} \tag{45.22}$$

と仮定する. もしパラメーターの間に次の関係

$$-\alpha + 2\beta + 2\lambda = 3 \tag{45.23}$$

が成り立つときは，実験と計算結果とがよく合う.

ところで，一般相対論にもどって測地線の方程式を3次元ベクトルで書き直してみよう. まず，(45.7) で τ を決めるために，

$$g_{00}\frac{dx^0}{d\tau} = -c\left(1 - \frac{a}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \beta = -c$$

とおく. すべて τ についての微分はこの式を使って t についての微分に直すと，$d^2x/d\tau^2$ は

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{a}{r}\right)^2}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{a}{\left(1 - \dfrac{a}{r}\right)^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{dx^k}{dt}$$

となる. そこで測地線の方程式に遊星の質量 m を掛けて，さらに分母の $\left(1 - \dfrac{a}{r}\right)^2$ を払うと

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = Gm\cdot M\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left\{\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) + 2(\vec{v})^2/c^2 - \frac{(3r - 2a)}{(r - a)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Big/c^2\right\}$$
$$-2\cdot\frac{GmM}{c^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{v}\Big/\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

この右辺で $|a/r| \ll 1$ であるからこれを無視すると，

$$\vec{F} = GmM\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left\{1-\frac{2MG}{c^2r}+2\frac{(\vec{v})^2}{c^2}-3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\Big/c^2\right\}$$
$$-2\frac{GmM}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{v}$$

これを（45.22）と比べると

$$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1,\ \lambda=1$$

したがって確かに（45.23）を満足している．（45.22）のようにたくさんの意味のわからないパラメーターを用いて，それに（45.23）のような条件をつけてはじめて実験を説明するのに比べれば，Einstein の理論がいかにすぐれているかがよくわかると思う．

（p. 159 に対する註）

$\eta^\mu(\tau)$ が観測者の世界線 C_0 に常に直交するという仮定が実際に許されるかどうかをしらべてみよう．まず C_0 上の $\tau=0$ の点 O において C_0 に直交する 3 次元超平面を考える．これと C との交点 O′ を始点として C の proper time τ' を測ることにする．したがって C 上の点の座標は τ' の関数 $x^{\mu'}(\tau')$ となる．いま C_0 上の点 $x^\mu(\tau)$ に対応して，C′ 上の点 $x^{\mu'}(\tau'=\tau)$ を考える．このように定義された 1 対の点に対して $\eta^\mu(\tau) = x^{\mu'}(\tau) - x^\mu(\tau)$ とおく．もし $\tau=0$ の瞬間に

$$(\lambda_\mu{}^{(0)}\cdot\eta^\mu)_{\tau=0}=0. \qquad \left(\lambda_\mu{}^{(0)}\cdot\frac{\delta\eta^\mu}{\delta\tau}\right)_{\tau=0}=0$$

となるようにすれば，η の満足すべき方程式（40.1）から，任意の時刻 τ に

$$\lambda_\mu{}^{(0)}(\tau)\cdot\eta^\mu(\tau)=0$$

となることが容易に証明できる．

第 VIII 章　宇宙論への応用

§ 46. 相対論的宇宙模型

一般相対論の特徴の1つは宇宙の構造について議論できることである．現在の天文学的知識では，宇宙の構造について確定的なことがいえる段階ではない．しかしながら，遠い星雲の光のスペクトルが**赤方変位**（§ 49 で説明する）を示すという観測事実を一般相対論で説明することができる．このことは一般相対論の正当であることの間接的証拠であると考えることができる．そこで以下に一般相対論ではどのような宇宙模型が許されるか，またそれらが現在知られている観測事実にどの程度一致するかについて以下に述べることにする．

宇宙を構成している主なものは恒星で，それらが銀河系および銀河系外星雲という集団となってちらばっている．したがって局所的に見れば星雲はばらばらに存在するが，これから考える宇宙の大きさにくらべれば星雲間の距離は無視することができるから，この章では宇宙は一様な密度を持った，3次元的に等方な流体で満たされていると仮定する．満たしている物質が等方ならば，それによって定まる宇宙も等方であると考えてよかろう．すなわち座標時間を適当に選んで，その各時刻で3次元空間の曲率をどの場所でも一定と仮定してよかろう．

等方な空間では，どの点を座標の原点にしても計量テンソルは球対称となる．そこで任意の点を座標の原点にとり，球座標をとり，$x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$ と書けば，隣接した2点間の3次元的不変距離 dl の2乗は

$$dl^2=g(r)(dr)^2+r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\} \tag{46.1}$$

と書ける*⁾．ここで $g(r)$ はこれからきめるべき r の関数である．このときの計量テンソルは

$$\left.\begin{aligned}&g_{11}=g(r),\ \ g_{22}=r^2,\ \ g_{33}=r^2\sin^2\theta,\\&g^{11}=\frac{1}{g(r)},\ \ g^{22}=\frac{1}{r^2},\ \ g^{33}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta},\\&g_{ij}=g^{ij}=0\quad(i\neq j)\end{aligned}\right\} \tag{46.2}$$

---

*⁾　(21.1)′ を参照せよ．

となる．3次元空間のアフィン係数を ${}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$ と書くことにすると

$$\left.\begin{aligned}&{}^{(3)}\Gamma^1_{11}=\frac{g'}{2g},\quad {}^{(3)}\Gamma^1_{22}=-\frac{r}{g},\quad {}^{(3)}\Gamma^1_{33}=-\frac{r\sin^2\theta}{g},\\&{}^{(3)}\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\quad {}^{(3)}\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\quad {}^{(3)}\Gamma^3_{31}=\frac{1}{r},\\&{}^{(3)}\Gamma^3_{23}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\qquad\qquad \text{その他の}\ {}^{(3)}\Gamma^i_{jk}=0\end{aligned}\right\}\tag{46.3}$$

となる*)．ただし g' は $g(r)$ の r に関する微分を表わす．3次元曲率テンソルの独立な成分の個数は6で**)，それらは

$$\left.\begin{aligned}&{}^{(3)}R_{1212}=\frac{rg'}{2g},\quad {}^{(3)}R_{2323}=r^2\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{g}\right),\\&{}^{(3)}R_{3131}=\frac{rg'\sin^2\theta}{2g},\quad {}^{(3)}R_{1231}={}^{(3)}R_{2312}={}^{(3)}R_{3123}=0\end{aligned}\right\}\tag{46.4}$$

となる．

次に，縮約された曲率テンソルとスカラー曲率を求めると，それぞれ

$$\left.\begin{aligned}&{}^{(3)}R_{11}=-\frac{g'}{rg},\quad {}^{(3)}R_{22}=-1+\frac{1}{g}-\frac{rg'}{2g^2},\\&{}^{(3)}R_{33}=-\frac{r\sin^2\theta g'}{2g^2}+\frac{\sin^2\theta}{g}-\sin^2\theta,\\&{}^{(3)}R_{ij}=0\ (i\neq j)\end{aligned}\right\}\tag{46.5}$$

$$\begin{aligned}{}^{(3)}R&=\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{g}-1\right)-\frac{2g'}{rg^2}\\&=\frac{2}{r^2}\left\{\left(\frac{r}{g}\right)'-1\right\}\\&=\frac{2}{r^2}\left(\frac{r}{g}-r\right)'\end{aligned}\tag{46.6}$$

となる．定曲率空間すなわちスカラー曲率が定数となる空間では

$${}^{(3)}R=C=\text{定数}$$

であるから

$$2\left(\frac{r}{g}-r\right)'=Cr^2$$

---

*) (46.3) にあたえられた ${}^{(3)}\Gamma$ は 76 ページにあたえた Γ の $e^{\lambda(r)}$ を $g(r)$ と書き直したものにほかならない．

**) 52 ページ § 14 の最後のところを参照のこと．

となる．積分定数をDとして上の式を積分すると

$$2r\left(\frac{1}{g}-1\right)=\frac{Cr^3}{3}+D$$

となる．これをgについて解くと

$$g=\frac{1}{1+Cr^2/6+D/(2r)}$$

という関係式を得る．座標原点 $r=0$ でgが消えないためには

$$D=0$$

としなければならない．スカラー曲率の値 C は正，負，および0の値を取りうるが，それらの符号によって空間の性質は非常に異なる．そこで，この3つの場合を統一的に扱うために

$$k=0,\quad \text{または}\quad \pm 1 \tag{46.7}$$

を使って

$$C=-\frac{6k}{a^2} \tag{46.8}$$

と書きかえておくと便利である．ここでaは長さの次元を持つ実数である．

いま計算した値を（46.1）に代入すると，定曲率空間の線素として

$$dl^2=\frac{1}{1-kr^2/a^2}(dr)^2+r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\} \tag{46.9}$$

を得る．また（46.4）を計算して（46.9）の計量テンソルと比較してみると

$${}^{(3)}R_{ijkl}=\frac{k}{a^2}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}) \tag{46.4$'$}$$

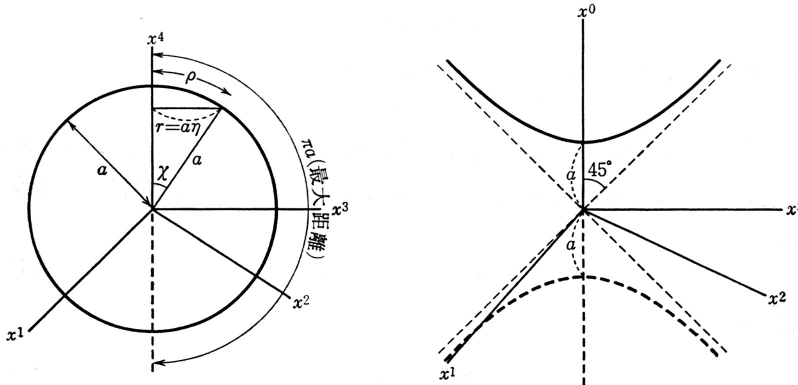
$${}^{(3)}R_{ij}=-\frac{2k}{a^2}g_{ij} \tag{46.5$'$}$$

という関係式が成り立っていることがわかる．

これらの空間で，円や球，すなわち r が一定値 r_0 をとる図形を描いてみると（円は $\theta=\pi/2$ の面上に描く），（46.9）の角部分の形は平坦な3次元空間の線素の角部分と一致するので，円周の長さは $2\pi r_0$，球の表面積は $4\pi r_0{}^2$ となる．しかし半径 $\rho(r_0)$ を計算すると

$$\rho(r_0)=\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/a^2}}=\begin{cases} a\sin^{-1}\dfrac{r_0}{a}\approx r_0+\dfrac{1}{6}\dfrac{r_0{}^3}{a^2} & k=1\ \text{のとき}\\ r_0 & k=0\ \text{のとき}\\ a\sinh^{-1}\dfrac{r_0}{a}\approx r_0-\dfrac{1}{6}\dfrac{r_0{}^3}{a^2} & k=-1\ \text{のとき}\end{cases}$$

となり，$k=1$ のときは $\rho>r_0$, $k=-1$ のときは $\rho<r_0$ となる．したがって円周率は，$k=1$ のときはπより小さく，$k=-1$ のときはπより大きくなる．特に $k=1$ のときには r_0 に最大値 $r_0=a$ が存在する．このような空間は閉じているといわれる．このほかの $k=0$ および $k=-1$ の空間では r_0 はいくらでも大きな値をとることができるので，



$k=1$(正曲率空間)　　$k=-1$(負曲率空間)

第 20 図

これらの空間は開いているといわれる．次に球の体積を求めると

$$V(r_0)=\int_0^{r_0}dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{det(g_{ij})}$$

$$=\int_0^{r_0}dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-kr^2/a^2}}$$

$$=\begin{cases}2\pi a\left(a^2\sin^{-1}\dfrac{r_0}{a}-r_0\sqrt{a^2-r_0^2}\right) & k=1\\[2ex] \dfrac{4\pi}{3}r_0^3 & k=0\\[2ex] 2\pi a\left(r_0\sqrt{a^2+r_0^2}-a^2\sinh^{-1}\dfrac{r_0}{a}\right) & k=-1\end{cases}$$

となる．半径 $\rho(r_0)$ と体積の関係をみるために級数展開して近似すると

$$V\approx\frac{4\pi}{3}r_0^3\left(1+\frac{3}{10}\,\frac{kr_0^2}{a^2}\right)$$

$$\approx\frac{4\pi}{3}\rho^3\left(1-\frac{1}{5}\,\frac{k\rho^2}{a^2}\right)$$

となる．したがって半径ρに対する体積Vは，平坦な $k=0$ の空間にくらべて $k=1$ のときは小さく，$k=-1$ のときは大きくなる．また $k=1$ のときには宇宙全体の体積は有

限である．体積 V は $k=1$ のときは r_0 の2価関数なので，わかりやすくするため

$$r_0 = a\sin\chi, \quad (0 \leqq \chi < \pi)$$

というおきかえをすると

$$V = 2\pi a^3(\chi - \sin\chi\cos\chi)$$

となり，その最大値，すなわち宇宙全体の体積は

$$2\pi^2 a^3$$

であることがわかる．また，この $k=1$ の空間の最大距離は πa である．

平坦でない3次元定曲率空間を平坦な4次元空間の中の3次元超曲面としてみることもできる．座標 x^μ を次式

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned} x^4 &= \pm\sqrt{a^2 - r^2} \qquad k=1 \text{ のとき} \\ x^0 &= \pm\sqrt{a^2 + r^2} \qquad k=-1 \text{ のとき} \end{aligned}\right\}$$

によって定義すると，これらは3次元超曲面の方程式

$$\left.\begin{aligned} &k=1 \text{ のとき} \qquad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2 \\ &k=-1 \text{ のとき} \qquad (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = a^2 \end{aligned}\right\}$$

を満たす．また線素の式（46.9）と一致するように超曲面上の線素を定義することができ，それらは

$$\left.\begin{aligned} &k=1 \text{ のとき} \qquad dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \\ &k=-1 \text{ のとき} \qquad dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^0)^2 \end{aligned}\right\}$$

となる．

結局 $k=1$ の空間は4次元ユークリッド空間内の3次元超球面，$k=-1$ の空間は4次元 Minkowski 空間内の3次元2葉超双曲面であることがわかる（**第20図**参照）．

ここで以下に使う便宜上変数 r の代わりに

$$r = a\eta \tag{46.10}$$

で定義される η に変える．こうすると線素の式（46.9）は

$$dl^2 = a^2\left[\frac{1}{1-k\eta^2}(d\eta)^2 + \eta^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right] \tag{46.11}$$

となり，a^2 が全体の因子として取り出される．この線素の式に対する計量テンソル，アフィン係数（46.3）および曲率テンソル（46.4）と（46.5）を計算しておくと，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}&g_{11}=\frac{a^2}{1-k\eta^2},\ g_{22}=a^2\eta^2,\ g_{33}=a^2\eta^2\sin^2\theta,\\&g^{11}=\frac{1-k\eta^2}{a^2},\ g^{22}=\frac{1}{a^2\eta^2},\ g^{33}=\frac{1}{a^2\eta^2\sin^2\theta},\\&g_{ij}=g^{ij}=0\ (i\neq j)\end{aligned}\right\}\tag{46.12}$$

$$\left.\begin{aligned}&{}^{(3)}\Gamma^1_{11}=\frac{a^2}{1-k\eta^2},\ {}^{(3)}\Gamma^1_{22}=-\eta(1-k\eta^2),\\&{}^{(3)}\Gamma^1_{33}=-\eta(1-k\eta^2)\sin^2\theta,\ {}^{(3)}\Gamma^2_{12}=\frac{1}{\eta},\ {}^{(3)}\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta\\&{}^{(3)}\Gamma^3_{13}=\frac{1}{\eta},\ {}^{(3)}\Gamma^3_{23}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \text{その他の}\ {}^{(3)}\Gamma^i_{jk}=0\end{aligned}\right\}\tag{46.13}$$

$$ {}^{(3)}R_{ijkl}=\frac{k}{a^2}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}), \tag{46.14}$$

$$ {}^{(3)}R_{ij}=-\frac{2k}{a^2}g_{ij} \tag{46.15}$$

となる.

次に，Einstein の重力場の方程式によって a の時間的変化を調べてみよう． ここでは (19.6) で無視された宇宙項を一応考慮して

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-\lambda g_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu} \tag{46.16}$$

という形の方程式を採用する． 3次元空間の曲率は空間座標には無関係とすると， 4次元線素は $ct=x^0$ として

$$ds^2=-b^2(\eta,x^0)(dx^0)^2+a^2(x^0)\left[\frac{1}{1-k\eta^2}(d\eta)^2+\eta^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right] \tag{46.17}$$

と書かれる． ここで b は2変数 η と x^0 の， a は x^0 のみの任意関数である． ここでも k は (46.7) の3つの値のどれかをとる定数である．

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は等方な完全流体の仮定から (19.7) で密度と圧力を空間的には一定とした式

$$T_{\mu\nu}=-p(x^0)g_{\mu\nu}-\{\rho(x^0)+p(x^0)/c^2\}u_\mu u_\nu \tag{46.18}$$

で与えられる． 流体の局部的な動きを無視して，流体は3次元空間座標系に関して静止していると仮定すると，ある小部分の proper time τ の微小量は

$$d\tau^2=-1/c^2\cdot g_{00}(dx^0)^2=b^2(\eta,x^0)dt^2$$

となり， 4元速度は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{b}\,\frac{dx^\mu}{dt} = \begin{cases} c/b & \mu = 0 \\ 0 & \mu = 1,2,3 \end{cases} \tag{46.19}$$

$$u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = \begin{cases} -cb & \mu = 0 \\ 0 & \mu = 1,2,3 \end{cases} \tag{46.20}$$

となる．したがってエネルギー運動量テンソルは

$$T_{00} = -c^2b^2(\eta, x^0)\rho(x^0),\quad T_{0i} = 0,\quad T_{ij} = -p(x^0)g_{ij} \tag{46.21}$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

となる．

線素が（46.17）で与えられている4次元空間のアフィン係数は，簡単のために微分を

$$\frac{da}{dx^0} = \dot{a},\quad \frac{\partial b}{\partial x^0} = \dot{b},\quad \frac{\partial b}{\partial \eta} = b'$$

で表わすことにすると

$$\begin{aligned} &\Gamma^p_{qr} = {}^{(3)}\Gamma^p_{qr},\quad \Gamma^p_{q0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^p_q,\quad \Gamma^p_{00} = \frac{bb'(1-k\eta^2)}{a^2}\delta^p_1, \\ &\Gamma^0_{pq} = \frac{\dot{a}}{ab^2}g_{pq},\quad \Gamma^0_{p0} = \frac{b'}{b}\delta^1_p,\quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot{b}}{b} \end{aligned} \tag{46.22}$$

$$(p, q, r = 1, 2, 3)$$

となる．次に，$R_{\mu\nu}$ を計算すると

$$\left.\begin{aligned} R_{pq} &= {}^{(3)}R_{pq} + \frac{b''}{b}\delta^1_p\delta^1_q - \left\{\frac{\ddot{a}}{ab^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2b^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab^3}\right\}g_{pq} - {}^{(3)}\Gamma^1_{pq}\frac{b'}{b}, \\ R_{p0} &= -\frac{2\dot{a}b'}{ab}\delta^1_p \\ R_{00} &= \frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}\dot{b}}{ab} - \left\{\frac{bb'}{a^2}(1-k\eta^2)\right\}' \\ &\quad + \frac{b'^2}{a^2}(1-k\eta^2) - \frac{bb'}{a^2}(1-k\eta^2)\,{}^{(3)}\Gamma^q_{1q} \end{aligned}\right\} \tag{46.23}$$

となる．

ここで（46.16），（46.21）と（46.23）の第2式をくらべると

$$R_{p0} = 0$$

すなわち

$$\dot{a}b' = 0$$

となることがわかる．したがって

$$\dot{a} = 0 \qquad \text{または} \qquad b' = 0 \tag{46.24}$$

ということになる．前者をとると宇宙の曲率は時間的にも一定となり，**静的宇宙**と呼ば

れるものになる．この模型は観測事実と合わないので現在では採用されていないが，歴史的に重要なので次節で説明することにする．後者をとった場合は**動的宇宙**と呼ばれ曲率は時間的に変化する．この模型については § 48 で述べる．

§ 47.　静的宇宙

静的宇宙では $\dot{a}=0$．さらに密度 ρ および圧力 p も時間的に一定としよう．この場合に (46.21) と (46.23) を混合テンソルで書き直してみると，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} &T^0{}_0=c^2\rho,\quad T^1{}_1=T^2{}_2=T^3{}_3=-p, \\ &\qquad T^i{}_j=0 \quad (i\neq j) \end{aligned}\right\} \tag{47.1}$$

および

$$\left.\begin{aligned} &R^1{}_1=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{b''}{b}(1-k\eta^2)-k\eta\frac{b'}{b}-2k\right\} \\ &R^2{}_2=R^3{}_3=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{b'}{b}\,\frac{1-k\eta^2}{\eta}-2k\right\} \\ &R^0{}_0=\frac{1}{a^2}\left\{-\frac{b''}{b}(1-k\eta^2)-\frac{b'}{b}\,\frac{2-3k\eta^2}{\eta(1-k\eta^2)}\right\} \\ &R^\mu{}_\nu=0 \quad (\mu\neq\nu) \end{aligned}\right\} \tag{47.2}$$

となる．以上の計算には (46.12)～(46.15) を使った．次にスカラー曲率は (47.2) から

$$R=\frac{2}{a^2}\left\{\frac{b''}{b}(1-k\eta^2)+\frac{b'}{b}\,\frac{2-3k\eta^2}{\eta}-3k\right\} \tag{47.3}$$

と計算される．

以上の結果を混合テンソルで書かれた場の方程式

$$R^\mu{}_\nu-\frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R-\lambda\delta^\mu_\nu=\kappa T^\mu{}_\nu$$

に代入すると，3個の方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\left\{-\frac{b'}{b}\,\frac{2(1-k\eta^2)}{\eta}+k\right\}-\lambda=-\kappa p \\ &\frac{1}{a^2}\left\{-\frac{b''}{b}(1-k\eta^2)-\frac{b'}{b}\,\frac{1-2k\eta^2}{\eta}+k\right\}-\lambda=-\kappa p \\ &\frac{3k}{a^2}-\lambda=\kappa c^2\rho \end{aligned}\right\} \tag{47.4}$$

を得る．第3式で ρ は正の量であり，λ も正の値をとるとすると，符号定数は

$$k=1$$

となる．すなわち静的宇宙の3次元部分の曲率は正である．この符号を採用し，第1式から第2式を辺々相減じて整理すると

$$b' = \eta(1-\eta^2)b'' \tag{47.5}$$

となる．また第1式を整理すると

$$\frac{1}{2}\{1-a^2(\lambda-\kappa p)\}b = \left(\frac{1}{\eta}-\eta\right)b' \tag{47.6}$$

という形にすることができる．この式の両辺を η で微分して整理すると

$$\left[\frac{1}{2}\{3-a^2(\lambda-\kappa p)\}\eta^2+1\right]b' = \eta(1-\eta^2)b'' \tag{47.7}$$

という式を得る．

この（47.7）から（47.5）を辺々相減ずると

$$\frac{1}{2}\{3-a^2(\lambda-\kappa p)\}\eta^2 b' = 0$$

となる．したがって

$$b' = 0 \tag{47.8}$$

または

$$3-a^2(\lambda-\kappa p) = 0 \tag{47.9}$$

ということになる．以下この2つの場合を別々に論ずることにする．

a）Einstein の宇宙

これから述べるものは 1917 年に Einstein がはじめて見出だした解である．さて（47.8）から

$$b = c(x^0)$$

となる．ここで $c(x^0)$ は x^0 の任意の関数であるが

$$\dot{f} = c(x^0)$$

となるような x^0 の関数 $f(x^0)$ を使って変数変換

$$x^{0*} = f(x^0)$$

を行なえば

$$\begin{aligned} dx^{0*} &= \dot{f}\,dx^0 \\ &= c(x^0)\cdot dx^0 \end{aligned}$$

とすることができるから，一般性を失なうことなく

$$b = 1$$

とおくことができる．また定数の間には（47.4）の第3式で $k=1$ とおいた関係と,（47.6）

で $b'=0$, $b \neq 0$ として得られる関係式

$$\frac{1}{a^2}=\lambda-\kappa p$$

が成り立つ．あるいは両式から

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{\kappa}{2}(c^2\rho+3p)\\ \frac{1}{a^2}&=\frac{\kappa}{2}(c^2\rho+p)\end{aligned}\right\} \tag{47.10}$$

を得る．線素の式は (46.17) で $b=1$ とおいたものになり ($k=1$ であることに注意)

$$ds^2=-(dx^0)^2+a^2\left[\frac{1}{1-\eta^2}(d\eta)^2+\eta^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right] \tag{47.11}$$

で与えられる．この座標系に対して静止している観測者の座標時間と固有時間は一致する．したがって場所による光の振動数の変化はない．

前節で述べたように，この空間の3次元部分は有限である．そこで原点にある星を出発した光を考えてみる．光の場合は $ds^2=0$ であるから ((15.4) 参照), $d\theta=d\varphi=0$ の方向に進むときは

$$dt=\frac{dx^0}{c}=\frac{a}{c\sqrt{1-\eta^2}}d\eta$$

という関係式を得る．光が $\eta=0$ から $\eta=1$ の所に達すると，宇宙一周のちょうど4分の1まで進んだことになるので，光がもとの所までもどる迄の時間は

$$t=4\frac{a}{c}\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=2\pi a/c$$

で与えられる (**第20図**参照)．したがって1つの星から出発したすべての光は $2\pi a/c$ の時間がたつと元の所へもどって集り，いわゆる幻星を作ることになる．

星雲間にはほとんど力が働いていないので，(47.10) の圧力 p を無視すると

$$\lambda=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2}\kappa c^2\rho$$

となる．宇宙の質量密度についてはまだ定説はないが，星雲の分布から推定された値

$$\rho\sim 3\times10^{-31}g/\mathrm{cm}^3$$

を採用することにすると，重力定数 κ の値は § 20 に与えられているので，

$$\lambda\ \sim 3\times10^{-58}\,\mathrm{cm}^{-2}$$

$$a\ \sim 6\times10^{28}\,\mathrm{cm}$$

$$\sim 7\times 10^{10}\ \text{光年}^{*)}$$

という，おうよその値を得る．

b) de Sitter の宇宙

次は de Sitter が見出した解で (47.9) が成り立つ場合で，それを書き直すと

$$\lambda=\frac{3}{a^2}+\kappa p \tag{47.12}$$

となる．この式と (47.4) の第3式で $k=1$ とおいたものを比較すると

$$\kappa(c^2\rho+p)=0$$

となり，$\kappa\neq 0$ であるから，圧力 p を無視すると

$$\rho=0$$

となる．すなわち，この宇宙は宇宙の物質密度を無視した近似の模型ということになる．さて (47.6) 式に (47.12) を代入すると（p も無視する）

$$-b=\left(\frac{1}{\eta}-\eta\right)b'$$

となる．この微分方程式を解くと

$$b(\eta,x^0)=c(x^0)\sqrt{1-\eta^2}$$

となる．ここで $c(x^0)$ は x^0 の任意関数であるが，Einstein の宇宙のときの $c(x^0)$ と同様にして，一般性を失なうことなく $c(x^0)=1$ とおくことができる．そうすると線素の式は

$$ds^2=-(1-\eta^2)(dx^0)^2+a^2\left[\frac{1}{1-\eta^2}(d\eta)^2+\eta^2\{(d\theta)^2\sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right] \tag{47.13}$$

となる．この線素で表わされる宇宙を **de Sitter の宇宙** という．

この空間は5次元の平坦な空間の中の4次元超曲面とみなすことができる．すなわち，

$$x^1=a\eta\sin\theta\cos\varphi,\quad x^2=a\eta\sin\theta\sin\varphi,\quad x^3=a\eta\cos\theta,$$

$$x^4=a\sqrt{1-\eta^2}\cosh(x^0/a),\quad x^5=a\sqrt{1-\eta^2}\sinh(x^0/a)$$

で5次元空間の座標を定義すると，これらは超曲面の方程式

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2-(x^5)^2=a^2$$

を満たす．また線素を

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2-(dx^5)^2$$

と定義すれば，これは (47.13) に一致する．結局 de Sitter の宇宙は5次元 Minkowski 空間内の4次元超1葉双曲面と一致する（**第 21 図** 参照）．

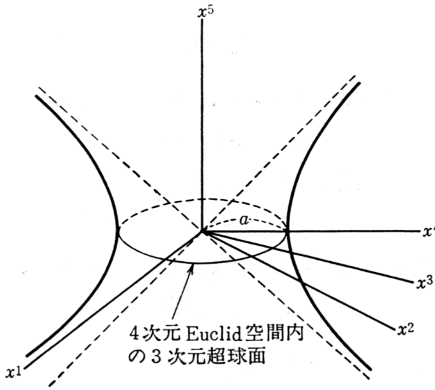
---

*) 1光年 $\sim 0.9\times 10^{18}$ cm は光が真空中を1年間に進む距離である．

この空間で $d\theta=d\varphi=0$ の方向に進む光に対しては，$ds^2=0$ から

$$dt=\frac{dx^0}{c}=\frac{a}{c(1-\eta^2)}d\eta$$

という関係式を得る．光が原点 $\eta=0$ を出発して $\eta=\eta_0$ に達するのに要する時間は



第 21 図

$$t=\frac{a}{c}\int_0^{\eta_0}\frac{d\eta}{1-\eta^2}=\frac{a}{2c}\log\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0}$$

で与えられる．したがって，$\eta=1$ の点まで光が到達するのに要する時間は無限大である．このことは § 21 に表われた Schwarzschild の障壁と同じような事情で，**de Sitter 宇宙の"地平線"**と呼ばれる．

§ 48. 動的宇宙

前節で (46.24) の2つの可能性のうち，$\dot{a}=0$ の場合について述べたので，ここでは，1922 年 Friedmann*) によって見出された

$$\dot{a}\neq 0,\qquad b'=0 \tag{48.1}$$

という場合について述べる．この式から b は x^0 のみの関数となるから，Einstein の宇宙の時と同様にして一般性を失うことなく

$$b=1$$

とおくことができる．そうすると線素の式 (46.17) は

$$ds^2=-(dx^0)^2+a^2(x^0)\left[\frac{1}{1-k\eta^2}(d\eta)^2+\eta^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right] \tag{48.2}$$

---

*) A. Friedmann : Z. Physik. **10** (1922) p. 377 および **21** (1924) p. 326.

となり，エネルギー運動量テンソル（46.21）は

$$T_{00} = -c^2\rho(x^0),\ T_{0i} = 0,\ T_{ij} = -p(x^0)g_{ij} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (48.3)$$

となる．曲率テンソル（46.23）は簡単になり（46.5)′ を使うと

$$\left.\begin{aligned} R_{pq} &= -\left(\frac{2k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}\right)g_{pq}, \\ R_{00} &= \frac{3\ddot{a}}{a}, \\ R_{p0} &= 0, \quad (p, q = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \qquad (48.4)$$

となる．スカラー曲率Rを（48.2）と（48.4）から計算すると

$$R = -\frac{6}{a^2}(k + \ddot{a}a + \dot{a}^2) \qquad (48.5)$$

となる．

重力場の方程式（46.16）にこれらの式を代入して共通因子を落とすと次の２式

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \lambda = -\kappa p \qquad (48.6)$$

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \lambda = \kappa c^2 \rho \qquad (48.7)$$

を得る．この（48.7）の両辺を x^0 で微分すると

$$\frac{6\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{6\dot{a}^3}{a^3} - \frac{6k\dot{a}}{a^3} = \kappa c^2 \dot{\rho}$$

となり，$\ddot{a}$ に（48.6）を代入し，移項して整理すると

$$\kappa c^2 \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \lambda + \kappa p\right) = 0$$

となる．さらに左辺第２項の括弧の中に（48.7）を代入し，両辺を κc^2 で割ると

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \qquad (48.8)$$

という関係式を得る．これは（27.2）のエネルギー運動量の連続の方程式にほかならない．連続の方程式（48.8）と（48.7）とから逆に（48.6）を導くことができるので，以後この節では（48.6）の代わりに（48.8）を考えることにする．

現在の宇宙は星雲が主な構成要素で，それらの間に働く力はほとんどないので，密度ρにくらべて圧力pは無視してよい．そこで（48.8）で $p = 0$ とおき， 両辺に a^3 をかけてまとめると

$$\frac{d}{dx^0}(\rho a^3)=0$$

と書きかえられる．積分定数 M を適当にとると

$$\frac{4\pi}{3}\rho a^3=M,\qquad M=\text{定数}>0 \tag{48.9}$$

とおくことができる．この ρ を（48.7）に代入して整理すると

$$\dot{a}^2=\frac{\kappa Mc^2}{4\pi a}+\frac{1}{3}\lambda a^2-k \tag{48.10}$$

という **Friedmann 方程式** と呼ばれるものを得る．この方程式の解は楕円関数で表わされるが，ここでは $\lambda=0$ としたときの解を示しておく．それらは k の3つの値によって，それぞれ

$$\left.\begin{array}{lll} k=0, & a=\left(\dfrac{9}{2}a_0\right)^{1/3}\cdot(x^0)^{2/3} & \\ k=+1, & a=a_0(1-\cos\xi); & x^0=a_0(\xi-\sin\xi) \\ k=-1, & a=a_0(\cosh\xi-1); & x^0=a_0(\sinh\xi-\xi) \end{array}\right\} \tag{48.11}$$

となる．ただし，積分定数は $x^0=0$ のとき $a=0$ となるようにえらんだ．また a_0 は

$$a_0=\frac{\kappa Mc^2}{8\pi} \tag{48.12}$$

で定義される定数である．

第 22 図 に3つの場合のようすを示した．3次元空間の曲率半径 a は $k=0$ と $k=-1$ のときは時間 x^0 と共に単調に増加するが，$k=+1$ のときは $0<x^0/a_0<\pi$ の間は時間と共に増加し，$\pi<x^0/a_0<2\pi$ の間は逆に減小する．したがって $k=+1$ のときは x^0 について周期 $2\pi a_0$ で振動する．いずれの解も $x^0=0$ に特異点を持ち，そこでは $a=0$ となり，(48.9) と (48.10) からわかるように ρ と $\dot{a}$ は無限大になる．さらに $k=+1$ のときには時間 x^0 について周期 $2\pi a_0$ で同様な特異点が表われる．しかしながらこれらの解は，宇宙の主要構成物が星雲で，それらの間の距離は離れていて，圧力を $p=0$ と近似して得た解であるから，a が小さいときには適用できない．

圧力 p の $c^2\rho$ に対する比の値は，構成物がすべて電磁波のときが一番大きい．そのときはエネルギー運動量テンソル（48.3）を縮約したものは0となる：

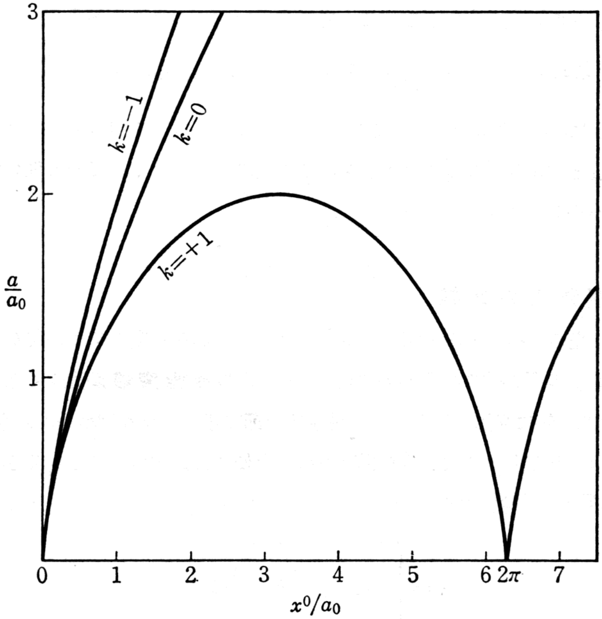
$$T=g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=c^2\rho-3p=0. \tag{48.13}$$

いま求めた解とは逆の極端な仮定として，曲率半径 a が0に近いとき，すなわち $a/a_0\ll 1$ で，かつ圧力 p がもっとも強く効くときを考えよう．たとえば電磁波で宇宙が満たされて

いるとすると（48.13）から

$$p=\frac{1}{3}c^2\rho$$

となる．この値を（48.8）に代入すると



第 22 図

$$a\dot{\rho}+4\dot{a}\rho=0$$

となり

$$\rho a^4=K, \qquad K=\text{定数} \tag{48.14}$$

という関係式を得る．この ρ の値を（48.7）に代入して整理すると

$$\dot{a}^2=\frac{\kappa c^2K}{3a^2}-k+\frac{\lambda}{3}a^2$$

となる．この式で $a\approx 0$ とすると右辺の第 2 および第 3 項は無視できて

$$\dot{a}=\sqrt{\frac{\kappa K}{3}}\frac{c}{a}, \qquad \text{または} \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dx^0}(a^2)=\sqrt{\frac{\kappa K}{3}}c$$

となり，積分すると（積分定数は $x^0=0$ で $a=0$ となるようにとる）

$$a=\left(\frac{4\kappa Kc^2}{3}\right)^{1/4}(x^0)^{1/2}$$

となる．したがってやはり $x^0=0$ は特異点となるが，宇宙が高密度になったときは重力以外の強い力が働いて事情が複雑になり，実際はどうなるのかわからないので，特異点のあることがこれらの宇宙模型の欠点とはいえない．

曲率が変化すると3次元空間の座標系に対して静止している，すなわち，$\eta,\ \theta,\ \varphi$ が同じ値をとる2点間の距離も変化する．この変化は（48.2）の3次元部分

$$dl^2=a^2(x^0)\left[\frac{1}{1-k\eta^2}(d\eta)^2+\eta^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right]$$

からわかるように，dl は $a(x^0)$ に比例している．したがって空間の1点に静止している観測者からみると，a が増大しているときには空間に対して静止している他のすべての物が遠ざかっていくようにみえる．

§49. 観測との比較

星雲からくる光のスペクトルを測定すると，われわれから星雲までの距離が遠くなればなるほど，光の振動数の少ない方へのずれ，すなわち**赤方変移**が大きくなることを，Hubble*) が 1926 年に見出だした．この現象は前節で述べた Friedmann の宇宙模型で，曲率 a が時間 x^0 とともに増大する膨張宇宙の解を使えば説明することができる．

線素の式（48.2）で変数変換

$$\eta=\begin{cases}\chi & k=0\\ \sin\chi & k=+1\\ \sinh\chi & k=-1\end{cases}\tag{49.1}$$

を行なうと

$$ds^2=-(dx^0)^2+a^2(x^0)\left[(d\chi)^2+c^2(\chi)\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\}\right]\tag{49.2}$$

$$c(\chi)=\begin{cases}\chi & k=0\\ \sin\chi & k=+1\\ \sinh\chi & k=-1\end{cases}$$

と書き換えられる．ある時刻に3次元座標系の原点から出発して $\varphi=0,\ \theta=\pi/2$ の世界線に沿って進む光を考えると，光の世界線は $ds=0$ であるから（49.2）より

$$dx^0=a(x^0)d\chi\tag{49.3}$$

を得る．時刻 t_1 および t_1+dt_1 に原点を出発した光が座標 $\left(\chi,\ \varphi=0,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ の点に

*) E. Hubble : Ap. J. **64** (1926) p. 321.

到達する時刻をそれぞれ t_2 および $t_2 + dt_2$ とすると，(49.3) から

$$\chi = \int_0^\chi d\chi = \int_{ct_1}^{ct_2} \frac{dx^0}{a(x^0)} = \int_{c(t_1+dt_1)}^{c(t_2+dt_2)} \frac{dx^0}{a(x^0)}$$

となる．この最後の等式から

$$\frac{dt_2}{a(ct_2)} = \frac{dt_1}{a(ct_1)}$$

となる．この関係から時間の比

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{a(ct_2)}{a(ct_1)} = 1 + z \tag{49.4}$$

を得る．ここで z は宇宙の膨張の程度を表わすパラメーターで，曲率 a が増大しているときは正の値をとる ($t_1 < t_2$ のとき $a(ct_1) < a(ct_2)$)．

時刻 t_1 と $t_1 + dt_1$ の間に原点に静止している星を出発した振動数 ν_1 の光の波の数は

$$\frac{dt_1}{1/\nu_1} = \nu_1 dt_1$$

である．これと同じ数の光の波を座標 χ にいる 3 次元座標系に対して静止している観測者は t_2 と $t_2 + dt_2$ の間に受けとるので，観測者の測定した振動数を ν_2 と書くと

$$\nu_1 dt_1 = \nu_2 dt_2 \tag{49.5}$$

という関係式を得る．光の振動数のずれは (49.4) と (49.5) から

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{a(ct_2)}{a(ct_1)} = 1 + z \tag{49.6}$$

となる．パラメーター z が正のときは

$$\nu_1 > \nu_2$$

となり赤方変移を起こす．

以上で膨張宇宙の模型で遠方の星雲のスペクトルの赤方変移を説明できることがわかったが，観測値から Friedmann 方程式のパラメーターを定めなければならない．Friedmann 方程式 (48.10) を定量的に定めるのには，k の符号を除いて 3 つのパラメーター M, λ および現在の曲率半径 $a(ct_2)$ の数値を知る必要がある．これらの 3 つの量は直接には観測できないが，その代わりに原理的に観測可能な 3 つの量

$$H = \frac{c\dot{a}(ct_2)}{a(ct_2)}, \quad I = \frac{c^2\ddot{a}(ct_2)}{a(ct_2)}, \quad \rho(ct_2) \tag{49.7}$$

の値を知ればよい．そうすると (48.6) と (48.7) から $p = 0$ として導かれる式

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\kappa c^2 \rho}{3} + \frac{\lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa c^2 \rho}{6} + \frac{\lambda}{3} \tag{49.8}$$

と (48.9) から M, λ, $a(ct_2)$ を計算することができる．ただし $k=0$ のときには a の値は定まらず，また3つの量 (49.7) は独立でなくなる．これらの量を定めるには2種類の観測，すなわち 1) 宇宙の平均物質密度と， 2) 赤方変移・等級関係の測定を行なえばよい．

赤方変移・等級関係式を導くために Friedmann の宇宙における電磁波の伝播のようすを Sandage*) が 1956 年に発表した方法によって調べてみることにする．以下の議論では物質と電磁場の相互作用および重力場のエネルギー運動量の変化を無視する．電磁場のエネルギー運動量テンソルは次の諸性質

$$T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu},\ g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=T^{\mu}{}_{\mu}=0,\ \nabla_{\nu}T^{\mu\nu}=0 \tag{49.9}$$

を持つ ((18.19), (18.20) 参照)．空間座標に関して静止している観測者の測定する電磁場のエネルギー運動量密度は $\sqrt{-g}\,T^{0\nu}$ で与えられ，体積 V の中に含まれる電磁場のエネルギー運動量は

$$P_V{}^{\mu}=\int_V\sqrt{-g}\,T^{0\mu}d^3x \tag{49.10}$$

となる ((30.3) 参照)．静止した観測者の4元共変速度は (46.20) で $b=1$ とおいたもので与えられるから $u_\mu=-c\delta^0_\mu$ と書ける． スカラー曲率 (48.5) に (49.8) と (48.9) を代入すると

$$R=-\left(\frac{3\kappa c^2M}{4\pi a^3}+4\lambda\right) \tag{49.11}$$

となる．この式の左辺はスカラー量で，右辺では a 以外はすべてスカラーの定数である．したがって，いま使っている座標系では a はスカラー量として扱ってよいことになり

$$V_\mu=-\frac{1}{c}a(x^0)u_\mu \tag{49.12}$$

という量を考えると， これは 4 元共変ベクトルとなる． この量の共変微分を計算すると (46.22) で $b=1$ とおいたものを使って

$$\begin{aligned}\nabla_\mu V_\nu&=\frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_\lambda=-\dot{a}g_{\mu\nu}\\&=\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla_\lambda V^\lambda\end{aligned} \tag{49.13}$$

と書けることがわかる．

---

*) F. Hoyle and A. Sandage : Pub. A. S. P. **68** (1965) p. 301, A. Sandage : Ap. J. **133** (1961) p. 355.

ここで4元反変ベクトル S^{μ} を

$$S^{\mu}=T^{\mu\nu}V_{\nu}$$

で定義する．この量の共変ダイバージェンスをとると，(49.9) と (49.13) から

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}S^{\mu}&=V_{\nu}\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}+T^{\mu\nu}\nabla_{\mu}V_{\nu}\\&=\frac{1}{4}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}V^{\lambda}\\&=0\end{aligned}$$

となる．一方4元ベクトルのダイバージェンスは

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}S^{\mu}&=\frac{\partial S^{\mu}}{\partial x^{\mu}}+\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}S^{\nu}=\frac{\partial S^{\mu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{S^{\nu}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}}\\&=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}\,S^{\mu})\end{aligned}$$

と書けるから，連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}\,S^{\mu})=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}\,T^{\mu0}a)=0 \tag{49.14}$$

を得る．したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{-g}\,S^{0}d^{3}x=a(x^{0})\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{-g}\,T^{00}d^{3}x=a(x^{0})P^{0} \tag{49.15}$$

はスカラーの保存量である ((26.11) 参照)．

天体の絶対光度 L を天体から単位時間あたり，単位立体角の中に放出される光のエネルギーと定義すると，(49.10) の V を天体全体を包む体積とすれば

$$4\pi L=-\frac{dP_{V}{}^{0}}{dt}$$

となる．時刻 t_1 に座標の原点にあった絶対光度 L の天体が微小時間 dt_1 の間に光を全方向に一様に放出したとすると，その放出したエネルギーは

$$4\pi L dt_1 \tag{49.16}$$

となる．

いま dt_1 の間に，この天体から放出された電磁波だけを考えると，これはその他の物質や電磁波と相互作用しないと仮定すれば，この電磁波は孤立系となる．したがって，(49.15) の P^0 を (49.16) でおきかえて定数をかけた

$$dQ=4\pi a(ct_1)Ldt_1 \tag{49.17}$$

は天体によって dt_1 の間に放出されたスカラー保存量となる．

時刻 t_1 に座標の原点を出発した光が時刻 t_2 に半径 $\rho(r)$ の球面上に達したとする．

(46.10), (49.1), (49.2) から $r = ac(\chi)$, また § 46 の議論により $\rho = a\chi$ となり，表面積は $4\pi r^2 = 4\pi a^2 c^2(\chi)$ となる．いま考えている天体の見かけの光度 l を観測者の場所で，天体からの光線に垂直な面の単位面積を単位時間あたりに通過する光のエネルギーと定義する．半径 $a\chi$ の球面全体を微小時間 dt_2 の間に通過するスカラー保存量は

$$dQ = 4\pi[a(ct_2)c(\chi)]^2 a(ct_2) l dt_2 \tag{49.18}$$

となる．2つの保存量の式 (49.17) と (49.18) から

$$l = \frac{L}{[a(ct_2)c(\chi)]^2} \frac{a(ct_1)}{a(ct_2)} \frac{dt_1}{dt_2}$$

あるいは (49.4) により

$$l = \frac{L}{[a(ct_2)c(\chi)(1+z)]^2} \tag{49.19}$$

という関係式を得る．天体の光度と等級の定義式*)

$$m = -2.5\log_{10} l, \qquad M = -2.5\log_{10} L \tag{49.20}$$

により，見かけの等級 m と絶対等級 M を導入すると (49.19) の両辺の対数をとることにより，関係式

$$0.2m = 0.2M + \log_{10}[a(ct_2)c(\chi)(1+z)] \tag{49.21}$$

を得る．

宇宙の寿命 t_2 にくらべて $t_2 - t$ が小さいときには時刻 t_2 の近くで $a(ct)$ を展開して $(t - t_2)$ について2次の項までとると

$$a(ct) \approx a(ct_2) + c(t-t_2)\dot{a}(ct_2) + \frac{1}{2}c^2(t-t_2)^2\ddot{a}(ct_2)$$

となり，(49.7) を代入すると

$$a(ct) \approx a(ct_2)\left\{1 + (t-t_2)H + \frac{1}{2}(t-t_2)^2 I\right\} \tag{49.22}$$

となる．この値を (49.4) の $a(ct_1)$ に代入し，$(t_2 - t_1)$ を未知数として，z について2次までとった近似で解くと

$$t_2 - t_1 \approx \frac{z}{H}\left\{1 - \frac{z(2H^2 - I)}{2H^2}\right\} \tag{49.23}$$

となる．いまの近似では $c(\chi) \approx \chi$ となり (49.3) から χ を求め (49.23) を代入すると，z^2 までの近似で

*) 等級は1等星の光度が6等星の光度の 100 倍になるように定義されている．

$$c(\chi) \approx \chi = \int_{ct_1}^{ct_2} \frac{dx^0}{a(x^0)} \approx \frac{cz}{a(ct_2)H}\left\{1 - \frac{z(H^2 - I)}{2H^2}\right\} \tag{49.24}$$

となる．この式を（49.21）に代入して，z について2次の項までとると

$$0.2m \approx 0.2M + \log_{10} z - \log_{10} H + \frac{1}{2} \log_{10} e \cdot \left(1 + \frac{I}{H^2}\right) z$$

あるいは $\log_{10} e$ の数値を入れて**赤方変移・等級関係式**

$$0.2m \approx 0.2M + \log_{10} z + 0.217\left(1 + \frac{I}{H^2}\right)z - \log_{10} H \tag{49.25}$$

を得る．

天体の絶対等級 M がわかると，見かけの等級 m と光の振動数の赤方変移の大きさを表わすパラメーター z は実測できるので，数多くの星の実測値にあうように（49.25）の H と I の値をえらべばよい．観測の精度は良くないが，およその値は

$$\begin{aligned} H &\sim 10^{-10}/\text{年} \\ &\sim 0.3 \times 10^{-17}/\text{sec} \\ I &\sim -H^2 \end{aligned} \tag{49.26}$$

の程度であるとされている．曲率の符号 k を決定するためには3つの模型の違いが出る次の近似

$$c(\chi) \approx \chi - k\chi^3/6$$

まで計算しなければならないが，ここでは省略する．

宇宙の平均密度 ρ は星雲の構成物を全空間にばらまいたとした値をとると

$$\rho(ct_2) \sim 3 \times 10^{-31}\text{g/cm}^3$$

となる．しかし，われわれの観測にかからないガス等が宇宙には存在するとおもわれるので，この値は数桁大きくなる可能性もある．

宇宙の寿命 t_2 は $1/H$ の程度である．簡単に計算できる（48.11）の $k=0$ の場合には，$t_2 = 2/(3H)$ となる．したがって（49.26）の値から宇宙の寿命はおうよそ 10^{10} 年程度ということになり，ウラニウムの半減期をもとにした地球の年令とも桁は一致する．

第IX章　重力理論の正準形式と量子化

§ 50.　力学変数の設定

Einstein の重力理論を正準形式を使って書き表わすことは，重力場を量子化するための準備として，まずやらなければならないことである．量子化の問題を別にしても，この理論を正準形式に書き表わすことは，Einstein の理論に登場するいろいろの量，特に $g_{\mu\nu}(x)$ の中で，どの成分が物理的に意味のある量か，つまり力学変数とみなされるものか，また時間の経過とともに，それらの力学変数はどのように変化していくかを見極わめるのにつごうがよい．

ところで，Einstein の方程式を Hamilton の原理にしたがって，作用積分 I から変分法で導きだせることは，すでに第5章で述べた．この I は一般座標変換に対して不変である．その結果 Einstein の方程式は座標変換に対して共変となる．しかし，I の不変性は他方においてめんどうなことをひき起こす．これとよく似た事情は，電磁場に対する Maxwell の理論にも存在する．

Maxwell の理論では作用積分 I はゲージ変換に対して不変である．このことが Maxwell の方程式のゲージ不変性を保証してくれる．しかしこの不変性が原因となって，スカラー・ポテンシャル A_0 に正準共役な量が恒等的に 0 となる．そのために，普通の力学の教科書にでてくる正準形式への書きかえの方法は，そのままでは Maxwell の理論に適用できない（(28.15) を参照せよ）．

これとまったく同じようなことが Einstein の理論にもでてくる．そこで，Einstein の理論を正準形式に書くこと自身が，正準理論の一般化という観点からも興味ある問題といえる．

重力場の作用積分 I は，§ 24，§ 30 にも述べたように

$$I = -\frac{1}{2\kappa}\int \sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}d^4x, \qquad d^4x \overset{d}{\equiv} dx^0\cdot dx^1\cdot dx^2\cdot dx^3 \tag{50.1}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho}$$

であたえられる．ここでアフィン係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \tag{50.2}$$

である．このために（50·1）の Lagrange 関数には $g_{\mu\nu}$ の2階微係数がでてくる．このことは，これからさき正準係式に書き直すのにすこしつごうが悪いので，これから Palatini のやりかたにしたがうことにする．

Palatini の Lagrange 関数は（50.1）とまったく同じ形で

$$\mathfrak{L}=-\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{50.1$'$}$$

である．（50.1）では $R_{\mu\nu}$ の中にでてくる Γ は（50.2）によって $g_{\mu\nu}$ の微係数で書き表わされるから，$\mathfrak{L}$ は $g_{\mu\nu}$，$\partial_\lambda g_{\mu\nu}$，$\partial_\lambda\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ の関数である．これに対して Palatini の Lagrange 関数（50.1)′ では，$\mathfrak{L}$ は $g_{\mu\nu}$，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$，$\partial_\rho\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ の関数と考える．つまり，Γ と g の間には，（50.2）のような関係は仮定しない．したがって，（50.1)′ の立場では独立な場の量は，10 個の $g_{\mu\nu}$ と 4×10 個の $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ である*⁾．

I の $g_{\mu\nu}$ にいての変分をとると，（Γ と g とは互いに独立であることに注意）

$$-\frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}}R+\sqrt{-g}\cdot\frac{\delta g^{\rho\sigma}}{\delta g_{\mu\nu}}R_{\rho\sigma}\right\}=0$$

すなわち

$$-\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R-R^{\mu\nu}\right\}=0 \tag{50.3}$$

となる．これは見かけ上，まったく Einstein の方程式そのままである．しかし，この中にでてくる $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ との間にはまだなんの関係もあたえられていないから，これだけでは Einstein の方程式と同一視するわけにはいかない．

そこで，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ についての（50.1)′ の変分を考えよう．（$-1/2\kappa$）をはぶくと

$$-\frac{1}{2}\partial_\alpha\{\sqrt{-g}(g^{\alpha\mu}\delta^{\nu}_{\lambda}+g^{\alpha\nu}\delta^{\mu}_{\lambda})\}+\partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})$$

$$+\sqrt{-g}\left\{g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}+g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}-g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}-\frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\delta^{\nu}_{\lambda}+\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\delta^{\mu}_{\lambda})g^{\rho\sigma}\right\}=0$$

この式をすこし整頓すると次のようになる．

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})+\sqrt{-g}(\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}g^{\alpha\nu}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}g^{\alpha\mu}-\Gamma^{\alpha}_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu})=0 \tag{50.4}$$

この式から導かれる関係式

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\lambda}=2\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}$$

を再び（50.4）に代入して，上の添字 $\mu\nu$ を下におろすと

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} \tag{50.5}$$

---

*⁾　$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ と仮定する．

となる．ここで，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ という仮定に注意すれば，（50.5）は（50.2）とまったく同じものであることがわかる．つまり Palatini の方法の特徴は，（50.2）を定義式としてはじめから用いる代わりに，場の方程式と同様に変分の結果として導きだすことである．（50.5）と（50.3）を一緒にしてはじめて（50.3）は Einstein の方程式となる．

さて，正準理論の特徴は，ある時刻における正準力学変数（質点力学の場合には一般座標変数 $q_n(t)$ とこれに正準共役な $p_n(t)$, $n=1, 2, \cdots, N$）があたえられたときに，時間の経過とともにこれらの力学変数が変化していくようすを，時間についての1階微分方程式で書き表わすことである（付録 § A.4 参照）．

この考え方を重力場の理論に適用するために，まず $x^0=$一定$=a$ という3次元的超曲面を考える．この a にいろいろの値をあたえると，互いに交わらないたくさんの曲面の積み重ねができる．いま，たとえば $x^0=a$ という曲面 σ の上の各点における力学変数（ここでは仮に $g_{\mu\nu}$ および $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ とする）の値があたえられているとする．そこで，正準形式に書き直された場の方程式を使うと，σ 上の g や Γ は，そのすぐ隣りの曲面 $x^0=a+\Delta a$ の上の各点における g や Γ の値を決定することになる．ところで，g や Γ の初期値，つまり σ 上の各点における g, Γ の値を任意にあたえることができるためには，この曲面は“空間的”曲面でなければならない．なぜかといえば，仮に σ 上の2点 P，Q が互いに“時間的”な関係にあるとする．そうすると，P 点における g, Γ の値は Q におけるそれらの値と，場の方程式によって一般に因果的に結びついている．それゆえ，これら2点における g, Γ の値を勝手にあたえられないことになるからである．

そこで，上に考えた $x^0=$一定 という曲面の積み重ねは，実は空間的曲面の集りでなければならない．すなわち，正準理論で用いる座標系では時間が特別扱いをうけることになり，Einstein の一般相対性原理の考え方に逆行することになる．しかし，曲面そのものは変えないでも，曲面上の各点の位置を識別するための変数 x^k $(k=1, 2, 3)$ については，自由に座標変換をしてかまわない．すなわち

$$\left.\begin{aligned} &x^0\to x^{0\prime}=x^0, \\ &x^k\to x^{k\prime}=f^k(x^0, x^1, \cdots, x^3) \end{aligned}\right\} \tag{50.6}$$

のような変換が可能である．そこで，$x^0=$一定 という曲面上において，力学変数を選定する場合にも，なるべく変換（50.6）に対して簡単な振る舞いをする量を選ぶのが好つごうである．

ここで記号について約束をする．一般にギリシャ文字の添字は 0, 1, 2, 3 を示し，ラテン文字は空間成分 1, 2, 3 を示すものとする．また，同じ添字が同一の数式の中に上下

2か所にでてきたときは，ギリシャ文字の場合には従来通り0から3まで，またラテン文字のときは1から3まで和をとるものとする．

さて，10 個の量 $g_{\mu\nu}(x)$ の中で $g_{kl}(x)$ は (50.6) に対して3次元共変テンソルとして変換される．これに対して g_{00}, g_{0k} の変換は複雑なものである．たとえば，g_{0k} については

$$g_{0k} \to g_{0k}'(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} g_{\mu l}(x)$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} g_{0l} + \frac{\partial x^m}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} g_{ml}$$

この右辺の第2項がなければ，g_{0k} は共変ベクトル（3次元的）となるが，$x^{m'} = f^m(x^0, \cdots, x^3)$ であるから，一般にはベクトルとならない．しかし g^{00} は (50.6) の変換に対してスカラーである．そこで，$g_{\mu\nu}$ の代わりに，次の 10 個

$$g_{kl} \quad (6\text{個}), \qquad \lambda_k \overset{d}{\equiv} g_{0k} \quad (3\text{個}), \qquad \lambda \equiv 1/\sqrt{-g^{00}} \quad (1\text{個}) \tag{50.7}$$

を力学変数として採用する．

アフィン係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の変換性はすでに知っているように

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) \to \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x')' = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}$$

である．そこで，これを (50.6) の変換に適用すると

$$\Gamma^0_{kl}(x) \to \Gamma^0_{kl}(x')' = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{l'}} \Gamma^0_{bc} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{l'}} \Gamma^0_{bc}$$

となる．つまり，Γ^0_{kl} は (50.6) に対して3次元共変テンソルとなる．しかし，Γ^0_{kl} 以外の Γ は (50.6) に対して簡単な変換規則をもたない．

さて，Γ と g との関係をあたえる方程式（定義式ではない）(50.5) について考えてみよう．この方程式は全体で 4×10 個ある．この中で，次のような 3×10 個の式

$$\partial_l g_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{l\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{l\nu} g_{\rho\mu} \tag{50.8}$$

には時間微分がでてこない．つまり，この式にでてくる量は，すべて $x^0 = \text{一定} = a$ という面上の量だけである．したがって，$g_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は全部が互いに独立ではなく，これらの間には少くとも (50.8) のような 30 個の関係式が存在する．(50.8) の中にでてくる Γ は Γ^0_{ik} のような成分のほかには

$$\Gamma^m_{ik} \quad (18\text{個}), \qquad \Gamma^m_{i0} \quad (9\text{個}), \qquad \Gamma^0_{i0} \quad (3\text{個}) \tag{50.9}$$

という 30 個の成分である．そこで，上述の (50.8) という 30 個の関係を使って(50.9) のような 30 個の Γ を (50.7) の諸量，すなわち g_{kl}, λ_k, λ と Γ^0_{kl} で表わすことに

する．その結果 (50.9) は独立な力学変数の仲間から除外されることになる．

次に，Lagrange 関数 (50.1)′ には，実際 R を書いてみればすぐわかるように，

$$\partial_0 \Gamma^{\mu}_{00}$$

は含まれていない．したがって，方程式 (50.3) にも $\partial_0 \Gamma^{\mu}_{00}$ はでてこない．つまり，場の方程式は Γ^{μ}_{00} の時間的振る舞いについてなにも教えてくれない．このことはΓ^{μ}_{00} が力学変数としての資格のないことを意味する．つまりわれわれは Γ^{μ}_{00} に勝手な値をあたえてもかまわないことになる．たとえば，変換 (50.6) に対して Γ^{k}_{00} は次のように変換される．

$$\Gamma^{k}_{00}(x) \to \Gamma^{k'}_{00}(x') = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{0'}} \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{l}} \frac{\partial^2 x^{l}}{\partial x^{0'} \partial x^{0'}}$$

そこで (50.6) にでてくる 3 個の関数 $x^{k'} = f^{k}(x^0, \cdots, x^3)$ を適当にえらぶことによって，3 個の Γ^{k}_{00} を消去してしまうこともできる．

以上のことから，$x^0 =$ 一定 という曲面上でわれわれが任意にとりうる力学変数としては，次の 16 個となる．

$$g_{kl},\ \lambda_k,\ \lambda,\ \Gamma^{0}_{kl} \tag{50.10}$$

また，ここに書いてない量は，すべて，(50.10) の 16 個の量を使って書き表わさなければならない．

まず g^{0k} からはじめよう．それには

$$0 = g^{0\mu} g_{\mu l} = g^{00} g_{0l} + g^{0k} g_{kl}$$

という関係式を使えばよい．これに (50.7) の定義を代入すると

$$g^{0k} g_{kl} = \lambda_l / \lambda^2$$

いま，3 次元反変テンソル $e^{kl} (= e^{lk})$ を

$$e^{kl} g_{li} = \delta^{k}_{i}$$

によって定義する．この式を e^{kl} について解けば，e^{kl} は g_{li} の (−1) 次の同次式で表わされる．そこで，この e^{kl} を使うと

$$g^{0k} = e^{kl} \lambda_l / \lambda^2 \overset{d}{\equiv} \lambda^k / \lambda^2 \tag{50.11}$$

となる．これから 3 次元テンソルの添字を下げるのには g_{kl}，上げるのには e^{kl} を使うことにする．

g_{00} も上と同様にして (50.7) の量で表わされる．

すなわち，

$$1 = g^{0\mu} g_{\mu 0} = g^{00} g_{00} + g^{0k} g_{k0}$$

これに (50.7) および (50.11) を代入すると,

$$g_{00}=\lambda^k\lambda_k-\lambda^2 \tag{50.12}$$

また，次の関係式は容易に証明できる.

$$\left(g^{kl}-\frac{g^{k0}g^{l0}}{g^{00}}\right)g_{li}=\delta_i^k$$

これから,

$$g^{kl}=e^{kl}-(\lambda^k\lambda^l/\lambda^2) \tag{50.13}$$

となる.

最後に

$$J=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{50.14}$$

とおくと

$$g^{00}=\frac{J}{\det(g_{\mu\nu})}\overset{d}{\equiv}\frac{J}{g}$$

であるから,

$$\sqrt{-g}=\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{-g^{00}}}=\lambda\sqrt{J} \tag{50.15}$$

となる．以上で計量テンソルに関係のある量は，すべて (50.7) を使って表わしたことになる.

次にアフィン係数について考えよう．まず，3次元アフィン係数を次のように定義する.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma^l_{ik}&=\frac{1}{2}e^{lm}\{g_{mi,k}+g_{km,i}-g_{ik,m}\} \\ {}^{(3)}\Gamma_{ik,l}&=g_{lm}\cdot{}^{(3)}\Gamma^m_{ik}=\frac{1}{2}\{g_{li,k}+g_{kl,i}-g_{ik,l}\}=\Gamma_{ik,l} \end{aligned}\right\} \tag{50.16}$$

Γ の左肩にある添字 (3) は3次元アフィン係数を示す．これのないものは従来通り4次元のアフィン係数である．さて，Γ^l_{ik} と ${}^{(3)}\Gamma^l_{ik}$ との関係を求めてみよう．それには (50.5) の方程式で $\partial_l g_{ik}$ のでてくるものを考えてみる．すなわち

$$\partial_l g_{ik}=\Gamma^0_{li}g_{0k}+\Gamma^0_{lk}g_{0i}+\Gamma^m_{li}g_{mk}+\Gamma^m_{lk}g_{mi}$$

あるいは

$$f_{ikl}\overset{d}{\equiv}\partial_l g_{ik}-\Gamma^0_{li}\lambda_k-\Gamma^0_{lk}\lambda_i=\Gamma^m_{li}g_{mk}+\Gamma^m_{lk}g_{mi}$$

と書くことができる．この i, k, l を循環させると

$$f_{kli}=\Gamma^m_{ik}g_{ml}+\Gamma^m_{il}g_{mk}$$

$$f_{lik}=\Gamma^m_{kl}g_{mi}+\Gamma^m_{ki}g_{ml}.$$

そこで § 12 と同様にして，はじめの 2 式の和から第 3 式を引いたものに e^{kj} を掛けて，(50.16) の定義を使うと

$$\Gamma^j_{il}={}^{(3)}\Gamma^j_{il}-\lambda^j\cdot\Gamma^0_{il} \tag{50.17}$$

となる.

次に (50.5) の $\partial_k g_{i0}$ を含む式を考えてみよう.

$$\partial_k g_{i0}=\Gamma^0_{ki}g_{00}+\Gamma^l_{ki}g_{l0}+\Gamma^0_{k0}g_{i0}+\Gamma^l_{k0}g_{il}$$

これは (50.7) の定義や (50.17) を使うと

$$\partial_k\lambda_i-\Gamma^0_{ik}(\lambda^m\lambda_m-\lambda^2)-\lambda_l\{{}^{(3)}\Gamma^l_{ki}-\lambda^l\Gamma^0_{ik}\}=\lambda_i\Gamma^0_{k0}+g_{il}\Gamma^l_{k0} \tag{50.18}$$

同様に (50.5) の $\partial_k g_{00}$ の式からは

$$\frac{1}{2}\partial_k(\lambda^m\lambda_m-\lambda^2)=\Gamma^0_{k0}(\lambda^m\lambda_m-\lambda^2)+\lambda_l\Gamma^l_{k0} \tag{50.18$'$}$$

(50.18), (50.18)$'$ を Γ^0_{k0}, Γ^i_{k0} について解くと

$$\Gamma^0_{k0}=\frac{1}{\lambda}\partial_k\lambda+\lambda^l\Gamma^0_{kl} \tag{50.19}$$

$$\Gamma^i_{k0}={}^{(3)}\nabla_k\lambda^i+(\lambda^2e^{il}-\lambda^i\lambda^l)\Gamma^0_{kl}-\frac{\lambda^i}{\lambda}\partial_k\lambda \tag{50.20}$$

となる．ここで ${}^{(3)}\nabla_k$ は 3 次元共変微分を示す．すなわち

$${}^{(3)}\nabla_k\lambda^i\overset{d}{\equiv}\partial_k\lambda^i+{}^{(3)}\Gamma^i_{kl}\lambda^l$$

のことである．以上で (50.5) の中の $\partial_l g_{\mu\nu}$ の出てくる 30 個の方程式を全部使って，30 個の Γ，すなわち Γ^l_{ik}, Γ^0_{k0}, Γ^i_{k0} を他の量に還元したことになる.

ところで，(50.19), (50.20) を使うと (50.5) の中の $\partial_0 g_{ik}$ の式は次のようになる．すなわち

$$\partial_0 g_{ik}=\Gamma^0_{0i}g_{0k}+\Gamma^0_{0k}g_{0i}+\Gamma^l_{0i}g_{lk}+\Gamma^l_{0k}g_{li}$$

この右辺に (50.19), (50.20) を使うと

$$\partial_0 g_{ik}={}^{(3)}\nabla_i\lambda_k+{}^{(3)}\nabla_k\lambda_i+2\lambda^2\Gamma^0_{ik} \tag{50.21}$$

となる．これは g_{ik} の時間的振る舞いを決める方程式である.

次に (50.5) の中の $\partial_0 g_{0\mu}$ を含む式を考えよう．それは少し書き直すと

$$\Gamma^0_{00}\lambda_m+\Gamma^k_{00}g_{km}=\partial_0\lambda_m-\Gamma^0_{0m}g_{00}-\Gamma^k_{0m}\lambda_k \tag{50.22}$$

および

$$\Gamma^0_{00}g_{00}+\Gamma^k_{00}\lambda_k=\frac{1}{2}\partial_0\{\lambda^i\lambda_i-\lambda^2\} \tag{50.23}$$

となる．これらの式は $\partial_0 g_{0\mu}$ を含むから $g_{0\mu}$ に対する場の方程式，つまり $g_{0\mu}$ の時間的振る舞いをあたえる式とみなすべきであろう．しかし (50.22), (50.23) からわかるように，これらの左辺にはさきにも述べた不定関数 Γ^0_{00}, Γ^k_{00} がある．この4個の Γ の時間的振る舞いはまったく任意にあたえることができるから，(50.22), (50.23) は $\partial_0\lambda_m$ や $\partial_0\lambda$ を規定する方程式として役に立たない．そこでむしろ，これらの式は4個の Γ^μ_{00} の定義式とみなすほうが適当である．

そこで (50.22), (50.23) の右辺には (50.19), (50.20) を代入する．また (50.23) の右辺には

$$\frac{1}{2}\partial_0(\lambda^i\lambda_i)=\frac{1}{2}\partial_0(e^{ik}\lambda_i\lambda_k)=\frac{1}{2}\lambda_i\lambda_k\partial_0 e^{ik}+\lambda^i\partial_0\lambda_i$$

のような量がでてくるが，この $\partial_0 e^{ik}$ は場の方程式 (50.21) を使って書きかえる．そうすると結局

$$\Gamma^0_{00}=\lambda^i\lambda^k\Gamma^0_{ik}+\frac{1}{\lambda}\partial_0\lambda+\frac{1}{\lambda}\lambda^k\partial_k\lambda \tag{50.24}$$

$$\Gamma^l_{00}=e^{lk}\partial_0\lambda_k+\frac{1}{2}e^{lk}\partial_k(\lambda^2-\lambda^i\lambda_i)-\frac{1}{\lambda}\lambda^l\lambda^k\partial_k\lambda$$

$$-\frac{1}{\lambda}\lambda^l\partial_0\lambda-\lambda^l\lambda^i\lambda^k\Gamma^0_{ik} \tag{50.25}$$

となる．これで 40 個の Γ の中で，Γ^0_{ik} 以外の 34 個の Γ は関係式 (50.5) を使ってすべて g_{kl}, λ_k, λ, Γ^0_{ik} によって書き表わされたことになる．そこで，後に残った方程式は6個の (50.21) と，10 個の成分をもつ Einstein の方程式 (50.3) だけとなった．これら 16 個の方程式が 16 個の力学変数 g_{kl}, λ_k, λ, Γ^0_{kl} の振る舞いを決定してくれるわけである．

§ 51. Lagrange 関数

Palatini の Lagrange 関数を g_{kl}, λ_k, λ および Γ^0_{kl} だけを使って書き直すことにする．ところで，この書き直しは非常にめんどうな計算を必要とするが，次のようにすると比較的簡単である．すなわち，座標変換 (50.6)

$$x^0\to x^{0'}=x^0$$

$$x^k\to x^{k'}=f^k(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$$

を利用して $g_{0k}=\lambda_k$ をまず消去してしまう．すなわち

$$\lambda_k(x)\to\lambda_k{}'(x')=g_{0k}{}'(x')=\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}g_{0l}(x)+\frac{\partial x^m}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}g_{ml}(x)=0$$

となるように f^k を決めればよい．いま，上の変換式を

$$x^k=\bar{f}^k(x^{0'},\ x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'})$$

と書き直すとき，

$$\frac{\partial x^k(x')}{\delta x^{0'}}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\bar{f}^k(x')}{\partial x^{0'}}=-e^{ki}(x)\lambda_i(x)=-\lambda^k(x) \tag{51.1}$$

となるように $\bar{f}^k(x')$ をえらべば，新しい座標系では確かに $\lambda_k{}'(x')=0$ となる．

そこでこれから，この新しい座標系（x'-系）において Lagrange 関数を計算しよう．しかしこの特別な新しい座標系を示す右肩のプライム（$'$）は，めんどうであるから，しばらくはぶくことにする．

さて，$\lambda_k=0$ のおかげでいろいろの量が大変簡単になる．たとえば

$$g^{kl}=e^{kl}-\frac{\lambda^k\cdot\lambda^l}{\lambda^2}=e^{kl},\quad g_{00}=-\lambda^2$$

また

$$\Gamma^\rho_{0\rho}=\frac{1}{\lambda}\partial_0\lambda-\lambda\cdot K,\qquad \Gamma^\rho_{k\rho}=\frac{1}{\lambda}\partial_k\lambda+{}^{(3)}\Gamma^l_{kl}$$

となる．ここで便宜上

$$K_{ik}\overset{d}{\equiv}-\lambda\Gamma^0_{ik},\quad K\overset{d}{\equiv}e^{ik}K_{ik}=-\lambda e^{ik}\Gamma^0_{ik}$$

という量を使うことにする．スカラー曲率は

$$\begin{aligned}R&=g^{\mu\nu}\{\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\rho}-\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}\}\\&={}^{(3)}R+\frac{1}{\lambda}(e^{ik}\partial_0K_{ik}+\partial_0K)+K_{ij}K^{ij}-K^2+\frac{2}{\lambda}\cdot{}^{(3)}\nabla^i\cdot{}^{(3)}\nabla_i\lambda\end{aligned} \tag{51.2}$$

となる．ただし，${}^{(3)}R$ とは3次元のスカラー曲率で

$${}^{(3)}R=e^{ik}\{\partial_i{}^{(3)}\Gamma^l_{kl}-\partial_l{}^{(3)}\Gamma^l_{ik}+{}^{(3)}\Gamma^l_{im}{}^{(3)}\Gamma^m_{kl}-{}^{(3)}\Gamma^l_{ik}{}^{(3)}\Gamma^m_{lm}\}$$

のことである．また，(51.2) の最後の項の ${}^{(3)}\nabla_i$ は3次元的共変微分で

$${}^{(3)}\nabla^i\cdot{}^{(3)}\nabla_i\lambda=e^{ik}\{\partial_i\partial_k\lambda-{}^{(3)}\Gamma^l_{ik}\cdot\partial_l\lambda\}$$

のことである．

以上の量は本当はすべてプライム（$'$）がついているはずである．そこで，これらの数式をもとの一般座標系（x-系）に関する量に書き直すことを考えよう．すなわち，(51.1)

の条件を満足する変換関数

$$x^k = \bar{f}^k(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

を使って，(51.2) にでてきたプライムのついた量を，すべてプライムのない量に書き直すわけである．

ところで，g_{ik}，e^{ik}，K_{ik} はすべてその添字の示すようなテンソルの変換規則にしたがう．K，${}^{(3)}R$，λ はどれもスカラーである．そこで，(51.2) の中で複雑な変換をするものは $\partial_0{}'K_{ik}{}'$ および $\partial_0{}'K'$ だけである ((51.2) の各項は本当はすべてプライムがついていることを忘れないようにすること)．

まず $\partial_0{}'K'$ を考えてみよう．

$$\partial_0{}'K'(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}}\frac{\partial K(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\partial_0 K + \frac{\partial x^m}{\partial x^{0'}}\partial_m K$$

$$= \partial_0 K(x) + \frac{\partial \bar{f}^m(x')}{\partial x^{0'}}\partial_m K(x)$$

これに (51.1) の条件を使うと

$$\partial_0' K'(x') = \partial_0 K(x) - \lambda^m(x)\partial_m K(x) \tag{51.3}$$

となる．同様に

$$e^{ik}{}'(x)'\cdot\partial_0' K_{ik}{}'(x') = e^{ik}\partial_0 K_{ik} - 2e^{il}\partial_l\lambda^k\cdot K_{ik} - e^{ik}\lambda^l\cdot\partial_l K_{ik} \tag{51.4}$$

そこで (51.2) は

$$R' = R = {}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2 + \frac{2}{\lambda}\cdot{}^{(3)}\nabla^i\cdot{}^{(3)}\nabla_i\lambda$$

$$-\frac{2}{\lambda}e^{ij}\partial_j\lambda^k\cdot K_{ik} + \frac{1}{\lambda}(e^{ij}\partial_0 K_{ij} + \partial_0 K)$$

$$-\frac{1}{\lambda}e^{ij}\lambda^l\cdot\partial_l K_{ij} - \frac{1}{\lambda}\lambda^l\cdot\partial_l K \tag{51.5}$$

ここで，K_{ij} の代わりに次のような量を導入する．

$$\left.\begin{aligned}
\pi_{ij} &= \sqrt{J}\{e_{ij}K - K_{ij}\} = \lambda\sqrt{J}\{\Gamma^0_{ij} - e_{ij}e^{rs}\Gamma^0_{rs}\} \\
\pi^{ij} &= e^{ik}e^{jl}\pi_{kl} \\
\pi &= e^{ij}\pi_{ij} = 2\sqrt{J}K = -2\lambda\sqrt{J}\cdot e^{ij}\Gamma^0_{ij}
\end{aligned}\right\} \tag{51.6}$$

これを使うと K_{ij} は

$$K_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{J}}\left\{\pi_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\pi\right\}$$

$$K=\frac{1}{2\sqrt{J}}\pi$$

となる．J は § 50 で定義したように（(50.14) 参照）

$$J=\det(g_{ik})$$

である．K_{ij} よりも π^{ij} を使う方が便利なことはあとでわかる．

さて，(51.6) を使って (51.5) を少し書き直すと，Lagrange 関数は

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}&=-\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\cdot R\\&=-\frac{1}{2\kappa}g_{ik}\partial_0\pi^{ik}+\frac{1}{2\kappa}\lambda\sqrt{J}\left\{\frac{\pi^2}{2J}-\frac{1}{J}\pi^{ik}\pi_{ik}-{}^{(3)}R\right\}\\&\quad+\frac{1}{\kappa}\cdot\lambda_i\nabla_k\pi^{ki}+\frac{1}{\kappa}\partial_j\left[\frac{1}{2}\lambda^j\pi-\pi^{jk}\lambda_k-\sqrt{J}\cdot\nabla^j\lambda\right]\end{aligned}\tag{51.7}$$

となる．ここで，π_{ik} は (51.6) からわかるように3次元テンソル密度であるから，その3次元共変微分は*)

$$\nabla_k\pi^{ij}\overset{d}{\equiv}\partial_k\pi^{ij}+\Gamma^i_{kl}\pi^{lj}+\Gamma^j_{kl}\pi^{il}-\Gamma^l_{kl}\cdot\pi^{ij}\tag{51.8}$$

である．この特別な場合として

$$\nabla_k\pi^{ki}=\partial_k\pi^{ki}+\Gamma^i_{kl}\pi^{kl}$$

である．

場の方程式は作用積分

$$I=\int\mathfrak{L}\{g_{ik},\ \lambda_k,\ \lambda,\ \pi^{ik}\}d^4x$$

から変分法で求められる．いま

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{ik}}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}-\partial_l\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik,l}}\right)+\partial_l\partial_m\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik,lm}}\right)$$

という記号を使うことにすると

$$\begin{aligned}2\kappa\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{ik}}&=-\partial_0\pi^{ik}+\lambda\sqrt{J}\left({}^{(3)}R^{ik}-\frac{1}{2}e^{ik}\cdot{}^{(3)}R\right)\\&\quad+(\nabla^i\nabla^k-e^{ik}\nabla_l\nabla^l)(\sqrt{J}\cdot\lambda)+\frac{\lambda e^{ik}}{2\sqrt{J}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2\right)\end{aligned}$$

---

*) これからは ∇_k は3次元共変微分を示すことにする。4次元のときは特に左肩に (4) をつけて ${}^{(4)}\nabla_k$ と記す．また，3次元アフィン係数の左肩の (3) もはぶく．その代わりに4次元アフィン係数のときには ${}^{(4)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と書くことにする．

$$
-\frac{2\lambda}{\sqrt{J}}\left(\pi^{im}\pi^{k}{}_{m}-\frac{1}{2}\pi\pi^{ik}\right)+\nabla_{m}(\lambda^{m}\pi^{ik})
$$
$$
-\pi^{km}\nabla_{m}\lambda^{i}-\pi^{im}\nabla_{m}\lambda^{k}
$$
$$
=0 \qquad (51.9)
$$

同様に

$$
2\kappa\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\pi^{ik}}\overset{d}{\equiv}2\kappa\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\pi^{ik}}-\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\pi^{ik}{}_{,\mu}}\right)\right]
$$
$$
=\partial_{0}g_{ik}+\frac{\lambda}{\sqrt{J}}\pi g_{ik}-\frac{2}{\sqrt{J}}\lambda\pi_{ik}-\nabla_{i}\lambda_{k}-\nabla_{k}\lambda_{i}=0 \qquad (51.10)
$$
$$
\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda}=\frac{1}{2\kappa}\sqrt{J}\left\{\frac{\pi^{2}}{2J}-\frac{1}{J}\pi^{ik}\pi_{ik}-{}^{(3)}R\right\}=0 \qquad (51.11)
$$
$$
\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_{i}}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda_{i}}=\frac{1}{\kappa}\nabla_{k}\pi^{ki}=0 \qquad (51.12)
$$

上の (51.10) は，(50.21) の Γ^{0}_{ik} を (51.6) を使って π_{ik} で表わしたものにほかならない.

さて，上に求めた式 (51.9)～(51.12) の中で (51.11)，(51.12) には場の量（すなわち g_{ik} や λ_k, λ 等）の時間微分がいっさい出てこない. つまりこの2つの式は，ある空間的超曲面 $x^0=$一定 の上の諸量の間の関係をあたえるものである. たとえば (51.11) は，π_{ik} と g_{ik} とが $x^0=$一定 の瞬間に，互いに独立ではありえないことを示している. もともとこれらの方程式を導きだすときには，g_{ik} と π_{ik} とは互いに独立な量と考えて変分をとったが，実はこれらは，運動学的に独立ではないことがわかった. つまり，(51.11) と (51.12) はこれら6個の量に対する束縛条件である. この2つの条件がもとの Lagrang 関数の中に含まれてているようすをみればわかるように，λ_i と λ はまさに力学でいう Lagrange の未定係数である*). したがって，本当の力学変数は g_{ik} と π^{ik} の合計 12 個である. しかしこれらの間には (51.11)，(51.12) という4個の複雑な関係が内在している. したがって，独立な力学変数の数は 12－4＝8 個となる.

ところで，方程式 (51.9)，(51.10) はどちらもそれぞれ時間微分 $\partial_0 g_{ik}$, $\partial_0\pi^{ik}$ を含むから場の方程式と考えられる. しかしこれら 12 個の式には4個の Lagrange の未定係数 λ_k, λ が含まれている. そこで，これらを消去するのに，12 個の中から適当な4個が使用される. したがって，残る8個の方程式が上に述べた8個の独立な力学変数の行動を

---

*) (51.7) の最後の $(1/\kappa)\partial_j[\cdots]$ という項の中にも λ_j, λ ははいっている. しかしこの項は div の形をしているから，変分法によって方程式を求める際には無視してよい.

規定してくれることになる.

しかしここで忘れてならないことがある. そもそも Einstein の理論は一般座標変換

$$x^{\mu} \to x^{\mu'} = f^{\mu}(x^0, \cdots, x^3) \quad (\mu = 0, 1, \cdots, 3)$$

に対して不変である. そのためにある座標系をもとにして, 方程式の解がみつかったとすると, 上の座標変換によってこの解を変換することにより新しい解が得られる. 新しい解は変換前の解とは見かけの関数形はちがうが, 同じ重力場を新しい座標系からながめたものを示す. この新しい解は, 上の変換にでてきた4個の関数 $f^{\mu}(x)$ を含む. $f^{\mu}(x)$ は, われわれが基準にとる座標系を勝手に選べばそれに応じて変わる. したがって, 方程式の解は常に4個の任意関数を含むことになる. これは未知関数の個数よりも, 独立な方程式の数が4個不足していることを示す. これは実は, 方程式の間にすでに何度も述べた恒等式

$$^{(4)}\nabla_{\mu}\left(^{(4)}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\cdot{}^{(4)}R\right) \equiv 0 \tag{51.13}$$

が存在するからである.

そこで, この不定性を除くには, たとえば座標系に4個の制限をつければよい. このような制限を**座標条件**という. この4個の新たにつけ加える束縛条件のために, ほんとうに独立な力学変数の個数は $8-4=4$ 個となる. この4個は, 後に正準理論にうつるときに, このうちの2個は, 他の2個の正準共役変数となることがわかる. したがって, 実際は独立な力学変数は2個という結論に達する.

この結論はすでに§33で弱い重力場の際に証明した. しかし同じことが, 上のように一般の場合にも成り立つ. なお束縛条件 (51.11), (51.12) がある瞬間 $x^0 = a$ のみでなく, 時間が経過してもそのまま成立していることは次の節で示す.

§52. Bianchi の恒等式

(51.13) の恒等式は Bianchi の恒等式から導かれるので, しばしば (51.13) 自身が **Bianchi の恒等式**と呼ばれる (§13参照). この恒等式をいまわれわれの使っている新しい記号 g_{ik}, λ_k, λ, π^{ik} で表わすとどうなるかをしらべてみよう.

まず, 一般の座標変換

$$x^{\mu} \to x^{\mu'} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}(x) \tag{52.1}$$

を考えよう. これに応じて場の量も変化をうけるが, それを§25のときと同様に δ で示す. たとえば

$$\delta g_{ik} \overset{d}{\equiv} g_{ik}'(x') - g_{ik}(x) = -\lambda_k \cdot \partial_i \delta x^0$$
$$- \lambda_i \cdot \partial_k \delta x^0 - g_{il} \cdot \partial_k \delta x^l - g_{kl} \cdot \partial_i \delta x^l \qquad (52.1)'$$

となる．

さて，Lagrange 関数（51.7）の中の ${}^{(3)}R$ は Γ^i_{kl} の微分を含む．そこで，§ 24 で行なったと同じようにして，この微分を3次元 div の形にまとめて，次のように $\mathfrak{L}$ を書きかえる．

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \partial_j \mathfrak{D}^j \qquad (52.2)$$

ここで $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{D}^j$ は次のようなものである．

$$\mathfrak{L}_1 \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2\kappa} g_{ik} \cdot \partial_0 \pi^{ik} + \frac{1}{2\kappa} \lambda \sqrt{J} \cdot \left[\frac{\pi^2}{2J} - \frac{1}{J} \pi^{ik} \cdot \pi_{ik} + e^{ik} (\Gamma^l_{im} \cdot \Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ik} \cdot \Gamma^m_{lm}) \right]$$
$$+ \frac{1}{\kappa} \lambda_i \cdot \nabla_k \pi^{ki} + \frac{1}{2\kappa} \sqrt{J} \cdot \partial_i \lambda \cdot \left[e^{ik} \cdot \Gamma^l_{kl} - \Gamma^i_{mn} \cdot e^{mn} \right] \qquad (52.3)$$

および

$$\mathfrak{D}^j \overset{d}{\equiv} \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{2} \pi \cdot \lambda^j - \pi^{jk} \cdot \lambda_k - \sqrt{J} \cdot \nabla^j \lambda + \frac{\lambda}{2} \sqrt{J} (\Gamma^j_{mn} \cdot e^{mn} - \Gamma^m_{km} \cdot e^{jk}) \right]$$

さて，作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int_\Omega \mathfrak{L} d^4x \overset{d}{\equiv} \int_\Omega \{\mathfrak{L}_1 + \partial_j \mathfrak{D}^j\} d^4x$$

は変換（52.1），（52.1)′ に対して不変である．そこで，§ 26 の Noether の方法にしたがって I の変分を計算する．いま，（25.4）にならって $\bar{\delta}$ を使うと

$$\delta I = \int_\Omega \left[\bar{\delta} \mathfrak{L}_1 + \partial_j (\bar{\delta} \mathfrak{D}^j) + \partial_\mu \{(\mathfrak{L}_1 + \partial_j \mathfrak{D}^j) \delta x^\mu\} \right] d^4x$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}} \bar{\delta} g_{ik} + \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \pi^{ik}} \bar{\delta} \pi^{ik} + \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda_k} \bar{\delta} \lambda_k + \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda} \bar{\delta} \lambda \right) d^4x$$
$$+ \int_\Omega \partial_j (\bar{\delta} \mathfrak{D}^j) d^4x + \int_\Omega \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial g_{ik,\mu}} \bar{\delta} g_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \pi^{ik}{}_{,\mu}} \bar{\delta} \pi^{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \lambda_{k,\mu}} \bar{\delta} \lambda_k \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \lambda_{,\mu}} \bar{\delta} \lambda + (\mathfrak{L}_1 + \partial_j \mathfrak{D}^j) \cdot \delta x^\mu \right] d^4x \equiv 0 \qquad (52.4)$$

もし場の方程式（51.9)～(51.12）を使うと（52.4）の第1積分は消える．また，Ω として，$a \leq x^0 \leq b$, $-\infty \leq x^1$, x^2, $x^3 \leq +\infty$ とする．さらにすべての変分量は空間的遠方で，十分に早く0となるものとすると，(52.4）の第2，第3積分に Gauss の定理を応用することによって

$$\delta I = \left[\int \mathfrak{S} \, d^3x \right]_{x^0=b} - \left[\int \mathfrak{S} \, d^3x \right]_{x^0=a} = 0, \qquad d^3x \overset{d}{\equiv} dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 \qquad (52.5)$$

となる．ただし $\mathfrak{G}$ は (52.4) の第3積分の [　] の中を $\mu=0$ としたもので，少し書きかえると

$$\mathfrak{G} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial g_{ik,0}}\delta g_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \pi^{ik}{}_{,0}}\delta \pi^{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \lambda_{k,0}}\delta \lambda_k + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \lambda_{,0}}\delta \lambda - \mathfrak{T}^0{}_\nu \delta x^\nu \tag{52.6}$$

となる．ここで $\mathfrak{T}^0{}_\nu$ は正準エネルギー・運動量テンソル密度で

$$\mathfrak{T}^0{}_\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial g_{ik,0}} g_{ik,\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \pi^{ik}{}_{,0}}\pi^{ik}{}_{,\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \lambda_{k,0}}\lambda_{k,\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \lambda_{,0}}\lambda_{,\nu} - \delta^0_\nu(\mathfrak{L}_1 + \partial_j \mathfrak{D}^j) \tag{52.7}$$

である．(52.5) から

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{G} d^3x = (x^0 \text{ に無関係}). \tag{52.5$'$}$$

すなわち，運動の恒量が得られる．これは後の § 54 で大切な量である．

さて，ここで変換 (52.1) として特に次のような特別の場合を考える．すなわち

$$x^0 \to x^{0\prime} = x^0,\ \ x^k \to x^{k\prime} = x^k + \xi^k(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{52.8}$$

これに対応して場の量は（ξ^k は無限小量とする）

$$\left.\begin{aligned}
&\delta g_{ik} = -\xi^m{}_{,i} g_{mk} - \xi^m{}_{,k} g_{mi}\\
&\delta \lambda_i = -\xi^m{}_{,i}\lambda_m - \xi^m{}_{,0} g_{mi}\\
&\delta \lambda = 0\\
&\delta \pi^{ik} = -\xi^l{}_{,l}\pi^{ik} + \xi^i{}_{,m}\pi^{mk} + \xi^k{}_{,m}\pi^{mi}
\end{aligned}\right\} \tag{52.8$'$}$$

のような変換をする．ここで $\xi^l{}_{,m} \overset{d}{\equiv} \partial_m \xi^l$ のことである．

さて，再び恒等式 (52.4) にもどって考える．いま (52.8)$'$ を (52.4) の第1積分に代入して，§ 28 にならって部分積分を行なう．そうすると (28,2) に相当して

$$\delta I \equiv \int_\Omega [\xi^m \cdot \mathfrak{F}_m + \partial_\mu \mathfrak{R}^\mu]\, d^4x \equiv 0 \tag{52.9}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_m \overset{d}{\equiv} & 2\partial_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}\cdot g_{mk}\right) - \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}\cdot g_{ik,m} + \partial_m\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \pi^{ik}}\cdot \pi^{ik}\right)\\
& - 2\partial_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \pi^{mk}}\cdot \pi^{ik}\right) - \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \pi_{ik}}\cdot \pi^{ki}{}_{,m} - \partial_m \lambda \cdot \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda}\\
& + \partial_0\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda_k}\cdot g_{mk}\right) + \partial_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda_i}\cdot \lambda_m\right) - \partial_m \lambda_i \cdot \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda_i}
\end{aligned} \tag{52.10}$$

である．また，$\mathfrak{R}^\mu$ は (52.4) の第 2，第 3 積分の被積分関数や，第 1 積分から部分積分のためにでてきた div の形の項をまとめたものである．(52.10) でドイツ文字を使った

のは，その量が変換（52.8）に対して密度量であることを示す．すなわちその量は $\sqrt{J}$ に比例している．このことに注意すると（52.10）は3次元共変微分を使って書きかえられる．すなわち

$$\mathfrak{F}_m \overset{d}{\equiv} 2\nabla_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}\cdot g_{km}\right)+\pi^{ik}\nabla_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\right)-2\nabla_i\left(\frac{\mathfrak{L}\delta_1}{\delta\pi^{mk}}\cdot\pi^{ik}\right)$$

$$-\partial_m\lambda\cdot\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}+\partial_0\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_k}\cdot g_{km}\right)+\nabla_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\cdot\lambda_m\right)-\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\cdot\nabla_m\lambda_i \qquad (52.10)'$$

上の式で，たとえば密度量

$$\mathfrak{A}^i{}_m \overset{d}{\equiv} \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}\cdot g_{km}$$

の共変微分とは

$$\nabla_k\mathfrak{A}^i{}_m \overset{d}{\equiv} \partial_k\mathfrak{A}^i{}_m+\Gamma^i_{kl}\cdot\mathfrak{A}^l{}_m-\Gamma^l_{km}\cdot\mathfrak{A}^i{}_l-\Gamma^l_{kl}\cdot\mathfrak{A}^i{}_m$$

のことである．

さて，§ 28 の議論にしたがって，任意関数 ξ が Ω の表面で0になるとすれば，（52.9）の第2積分は消えて

$$\int_\Omega \xi^m\cdot\mathfrak{F}_m d^4x\equiv 0$$

となる．ξ^m は Ω 内ではまったく任意であるから，結局，恒等式

$$\mathfrak{F}_m\equiv 0 \qquad (52.11)$$

がでてくる．

もし（52.11）に場の方程式

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}=0,\qquad \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}=0 \qquad (52.12)$$

を適用すると，（52.11）は，

$$\partial_0\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_l}\right)=e^{lm}\left[-\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_k}\right)\partial_0 g_{km}+\partial_m\lambda\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}\right)-\nabla_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\cdot\lambda_m\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\right)\nabla_m\lambda_i\right] \qquad (52.11)'$$

となる．

次に（52.6）について考えてみよう．（52.6）に（52.8），（52.8）′ を代入すると

$$\mathfrak{G}=\frac{1}{2\kappa}\partial_m(\xi^m\pi-2\pi^m{}_i,\xi^i)+\frac{1}{\kappa}\xi^i\nabla_m\pi^m{}_i$$

したがって，（52.8），（52.8）′ の変換に対しては，（52.5）′ は

$$G_1 \overset{d}{\equiv} \int \frac{1}{\kappa}(\xi^i \cdot \nabla_m \pi^m{}_i) d^3x = 一定 \tag{52.13}$$

となる．ここで ξ^i は空間的に無限遠方で0になるものとした．(52.13) はさらに次のようにも書ける．

$$G_1 = \int \xi_i \cdot \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta \lambda_i}\right) d^3x. \tag{52.13)'$$

(52.8) は $x^0 = 一定$ という超曲面の形を変えない変換である．一方

$$\left.\begin{aligned} x^0 &\to x^{0\prime} = x^0 + \xi(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \\ x^k &\to x^{k\prime} = x^k \end{aligned}\right\} \tag{52.14}$$

は，曲面の形を変化させるものである．これに対して場の量は次のような変換をうける．

$$\left.\begin{aligned} \delta g_{ik} &= -\xi_{,i}\cdot\lambda_k - \xi_{,k}\cdot\lambda_i \\ \delta\lambda_i &= -\xi_{,0}\cdot\lambda_i - \xi_{,i}(\lambda^m\cdot\lambda_m - \lambda^2) \\ \delta\lambda &= -\xi_{,0}\cdot\lambda + \xi_{,k}\cdot\lambda^k\cdot\lambda \\ \delta\pi^{ik} &= \xi_{,l}(\lambda^i\pi^{lk} + \lambda^k\pi^{li}) - \lambda^l\cdot\xi_{,l}\pi^{ik} - \sqrt{J}\,(e^{il}e^{km} + e^{kl}e^{im})\xi_{,l}\partial_m\lambda \\ &\quad - \lambda\sqrt{J}\cdot e^{il}\cdot e^{km}\nabla_l\nabla_m\xi + e^{ik}\sqrt{J}\,\{2\xi_{,m}\partial_n\lambda + \lambda\cdot\nabla_m\nabla_n\xi\}e^{mn} \end{aligned}\right\} \tag{52.14)'$$

ここで ξ は3次元スカラーと考えて

$$\nabla_l\xi \overset{d}{\equiv} \partial_l\xi,\quad \nabla_l\nabla_m\xi \overset{d}{\equiv} \partial_l\partial_m\xi - \Gamma^i_{lm}\partial_i\xi$$

とした．

さて，前のときと同じようにして，変換 (52.14)，(52.14)′ に対して，(52.11) の代わりにこんどは次の恒等式がでてくる．

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_0 \overset{d}{\equiv}\ & 2\nabla_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}\cdot\lambda_k\right) - \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta g_{ik}}\cdot\partial_0 g_{ik} - 2\nabla_l\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\cdot\lambda^i\cdot\pi^{lk}\right) \\ & + \nabla_l\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\pi^{ik}\cdot\lambda^l\right) + 2\nabla_l\left\{\sqrt{J}\cdot e^{il}\cdot e^{km}\cdot\partial_m\lambda\cdot\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\right\} \\ & - \nabla_l\nabla_m\left\{\sqrt{J}\cdot\lambda\cdot e^{il}\cdot e^{km}\cdot\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\right\} - 2\nabla_l\left\{\sqrt{J}\cdot e^{lm}\cdot\partial_m\lambda\cdot e^{ik}\cdot\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\right\} \\ & + \nabla_m\nabla_n\left\{\sqrt{J}\cdot\lambda\cdot e^{mn}\cdot e^{ik}\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\right\} - \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\pi^{ik}}\cdot\partial_0\pi^{ik} + \partial_0\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\lambda_i\right) \\ & + \nabla_i\left\{\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}(\lambda^m\lambda_m - \lambda^2)\right\} - \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\partial_0\lambda_i + \partial_0\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}\cdot\lambda\right) \\ & - \nabla_k\left\{\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}\cdot\lambda^k\cdot\lambda\right\} - \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}\cdot\partial_0\lambda \equiv 0 \end{aligned} \tag{52.15}$$

これに場の方程式 (52.12) を使うと

$$\lambda\partial_0\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}\right)+\lambda_i\partial_0\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\right)$$

$$=-\nabla_i\left\{\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}(\lambda^m\lambda_m-\lambda^2)\right\}+\nabla_k\left\{\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}\cdot\lambda^k\cdot\lambda\right\} \tag{52.16}$$

となる．そこで，もし $x^0=0$ の瞬間に束縛条件

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}=0,\qquad \frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}=0 \tag{52.17}$$

がすべての点 $(\vec{x})$ において成立しているとすれば，(52.16) と (52.11)′ との両方から，任意の時刻 $x^0>0$ においても，(52.17) は成り立つことになる． なお， 4 個の恒等式 (52.15) と (52.11) が Bianchi の恒等式である．

さて， 上の議論と逆に束縛条件 (52.17) を (52.15)，(52.11) に代入したとすると，これは場の方程式 (52.12) の間に成り立つ関係式を示す．この関係式は，g_{ik}，π^{ik} が束縛条件さえ満足していれば，場の方程式の解であろうとなかろうと， 任意の g_{ik}，π^{ik} に対して成立する． また，(52.17) の条件には λ_k，λ はでてこないから， 上述の関係式は任意の λ_k，λ に対して成立する．これらのことから， この関係式は条件づきの恒等式といえる．

最後に (52.14)，(52.14)′ の場合に (52.6) で定義された $\mathfrak{G}$ がどのようなものになるかをしらべてみよう．この場合には

$$\mathfrak{G}=-\frac{1}{\kappa}\pi^{lk}\lambda_k\xi_{,l}+\frac{1}{2\kappa}\pi\cdot\lambda^l\xi_{,l}-\frac{2}{\kappa}\sqrt{J}e^{ik}\partial_i\lambda\cdot\xi_{,k}$$

$$-\frac{1}{\kappa}\sqrt{J}\cdot\lambda\cdot\nabla^m\nabla_m\xi-\left(-\frac{g_{ik}}{2\kappa}\cdot\partial_0\pi^{ik}-\mathfrak{L}\right)\xi$$

$$=\frac{1}{2\kappa}\partial_l[\cdots]+\xi\left(\lambda\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}+\lambda_i\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\right)$$

そこで，空間的遠方で ξ が 0 になるとすると

$$G_2\overset{d}{\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{G}\,d^3x=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\left(\lambda\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda}+\lambda_i\frac{\delta\mathfrak{L}_1}{\delta\lambda_i}\right)d^3x \tag{52.18}$$

(52.13)′ および (52.18) は，もし束縛条件 (52.17) を使えば，どちらも 0 となってしまう．この G_1，G_2 は後の § 54 で再び議論されるであろう．

§ 50 からいままで述べてきたことは力学でいう Lagrange 形式の理論と呼ばれるものである．もともと x^0 を特別扱いする以前には Lagrange 形式に書かれた場の方程式 (50.3) と (50.4) はいずれも一般座標変換に対して不変であることが一目瞭然であった．このことは Lagrange 形式のすぐれた点といえる． ただこれから述べる正準形式への準

備のために，この一見して不変な形になっている方程式をわざわざ書き直して，見かけ上の時間と空間との対称性をとりこわしたわけである．その結果，場の方程式も 2 つに区分され，(51.9)，(51.10) は場の方程式として扱われるが，(51.11)，(51,12) は束縛条件ということになった．しかし話を順に元にもどせば，理論全体の一般座標変換に対する不変性が依然として成立していることは容易にわかる．

§ 53. 正準理論

さて，巻末の付録 § A.4 に述べてある処法にしたがって，まず $x^0=$ 一定 の瞬間における力学変数を g_{ik}，λ_k，λ，π^{ik} とする．これらに正準共役な変数を，それぞれ p^{ik}，p^k，p^0，および P_{ik} とする．ここで Lagrange 関数としては，(51.7) を少し書き直して次のようにする．

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}^*-\frac{1}{2\kappa}\partial_0(g_{ik}\pi^{ik})+\frac{1}{\kappa}\partial_j\left\{\frac{1}{2}\lambda^j\pi-\pi^{jk}\lambda_k-\sqrt{J}\cdot\nabla^j\lambda\right\}$$

ここに

$$\mathfrak{L}^*=\frac{1}{2\kappa}\pi^{ik}\partial_0 g_{ik}+\frac{1}{2\kappa}\lambda\sqrt{J}\left\{\frac{\pi^2}{2J}-\frac{1}{J}\pi^{ik}\cdot\pi_{ik}-{}^{(3)}R\right\}+\frac{1}{\kappa}\lambda_i\nabla_k\pi^{ki} \tag{53.1}$$

である．この $\mathfrak{L}^*$ は x^0 に無関係な一般座標変換

$$x^0\to x^{0\prime}=x^0,\quad x^k\to x^{k\prime}=f^k(x^1,\ y^2,\ x^3) \tag{53.2}$$

に対してスカラー密度である．また，変分法にしたがって場の方程式を求めるときは，$\mathfrak{L}$ も $\mathfrak{L}^*$ も，同じ方程式をあたえる．そこでこんごは，Lagrange 関数としては $\mathfrak{L}$ の代わりに $\mathfrak{L}^*$ を用いることにして，簡単のために * 印をはぶく．すなわち

$$\mathfrak{L}\overset{d}{\equiv}(53.1)\ \text{の右辺}$$

と約束する．

ところで，変換 (53.2) に対して Lagrange 関数がスカラ－密度になるという条件だけでは，まだ $\mathfrak{L}$ の形の決定には任意性が残る．たとえば，(51.7) を $\mathfrak{L}^*$ にすりかえるときに，はぶいた $\partial_j\{\cdots\}$ の中の各項はいずれも (53.2) に対してスカラー密度であるから，これを Lagrange 関数に付け加えて悪い理由はない．しかし，§ 52 で ${}^{(3)}R$ の中にある Γ の微分を 3 次元 div にまとめたが，これを省略することは許されない．というのは，${}^{(3)}R$ の残りの部分は (53.2) に対してスカラーではないからである．

さて，これから質点力学の処法をふりかえってみよう．自由度が N の力学系では，N 個の一般座標　$q_n(t)$　$(n=1,\cdots,N)$　と，これに正準共役な N 個の独立な量 $p_n(t)$

($n=1, \cdots, N$) とをまず用意する．さらに Lagrange 関数から作られたN個の量

$$\frac{\partial L(q_1\cdots q_N,\dot{q}_1\cdots\dot{q}_N)}{\partial\dot{q}_n} \qquad (n=1, \cdots, N) \tag{53.3}$$

が，$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N$ の関数として互いに独立なときは，これらの関数と上に用意した p_n との間に

$$p_n=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_n} \qquad (n=1, \cdots, N) \tag{53.4}$$

という関係式をもうける．これによって $\dot{q}_1\cdots\dot{q}_N$ は (p, q) の関数として書き表わされることになる．ここで注意すべきことは N 個の量 (53.3) が $\dot{q}_n$ の関数として互いに独立であるという条件である．もし (53.3) のすべてが独立でなく，たとえばN番目の量が他の $N-1$ 個の量を使って表わされるときは，すべてのnについて (53.4) という等式を設定するわけにはいかない．というのは，左辺のN個の p_n はすべて互いに独立な量であるから，もし (53.4) を要求すれば，あきらかに矛盾である．

そこでわれわれの場合に，まず (53.3) に相当する量を計算してみると*)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(g_{ik,0})}=\frac{1}{2\kappa}\pi^{ik}\\&\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\pi^{ik}{}_{,0}}=0,\ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda_{k,0}}=0,\ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda_{,0}}=0\end{aligned}\right\} \tag{53.5}$$

となる．つまりどの式にも場の量 g, λ, π の時間微分がでてこない．したがって，(53.4) のタイプの関係式を解いて $g_{ik,0}, \lambda_{k,0}, \cdots$ 等を ($p^{ik}, p^k, \cdots$) や ($g_{ik}, \lambda_k, \cdots$) の関数として書き表わすことは不可能である．つまり，$g_{ik,0}, \lambda_{k,0}, \cdots$ 等は ($p^{ik}, \cdots; g_{ik}, \cdots$) の関数としては全く不定である．そこで

$$g_{ik,0}\overset{d}{\equiv}u_{ik},\ \pi^{ik}{}_{,0}\overset{d}{\equiv}\Lambda^{ik},\ \lambda_{k,0}\overset{d}{\equiv}v_k,\ \lambda_{,0}\overset{d}{\equiv}w \tag{53.6}$$

とおく．u_{ik}, Λ^{ik}, v_k, w はいずれも不定関数を示す．

Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&\overset{d}{\equiv}p^{ik}u_{ik}+P_{ik}\Lambda^{ik}+p^kv_k+p^0w-\mathfrak{L}\\&=\left(p^{ik}-\frac{1}{2\kappa}\pi^{ik}\right)u_{ik}+P_{ik}\Lambda^{ik}+p^kv_k+p^0\cdot w\\&\qquad-\frac{1}{2\kappa}\sqrt{J}\,\lambda\left[\frac{\pi^2}{2J}-\frac{1}{J}\pi^{ik}\pi_{ik}-{}^{(3)}R\right]-\frac{1}{\kappa}\lambda_i\nabla_k\pi^{ki}\end{aligned} \tag{53.7}$$

---

*) これからは計算に便利なように，光速度 c を 1 とする単位系を使うことにする．したがって $x^0=t$ となる．

(53.7) の中で $\pi \overset{d}{\equiv} g_{mn}\pi^{mn}$, $\pi_{ik} \overset{d}{\equiv} g_{im}g_{kn}\pi^{mn}$ であることに注意すると，Hamilton の運動方程式に相当するものは次のような場の方程式となる．

$$\left.\begin{aligned} &\partial_0 g_{ik} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^{ik}} = u_{ik}, \quad \partial_0\pi^{ik} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_{ik}} = \Lambda^{ik} \\ &\partial_0\lambda_k = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^k} = v_k, \quad \partial_0\lambda = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^0} = w \end{aligned}\right\} \tag{53.8}$$

$$\begin{aligned} \partial_0 p^{ik} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g_{ik}} + \partial_m\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g_{ik,m}}\right) \\ &= -\left[\left(p^{mn} - \frac{1}{2\kappa}\pi^{mn}\right)\frac{\partial u_{mn}}{\partial g_{ik}} + P_{mn}\frac{\partial\Lambda^{mn}}{\partial g_{ik}} + p^m\frac{\partial v_m}{\partial g_{ik}} + p^0\frac{\partial w}{\partial g_{ik}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa}\lambda\sqrt{J}\left({}^{(3)}R^{ik} - \frac{1}{2}e^{ik}\cdot{}^{(3)}R\right) + \frac{1}{2\kappa}(\nabla^i\nabla^k - e^{ik}\nabla_m\nabla^m)(\sqrt{J}\lambda) \\ &\quad + \frac{e^{ik}}{4\kappa\sqrt{J}}\lambda\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - \frac{\lambda}{\kappa\sqrt{J}}\left(\pi^{im}\pi^k{}_m - \frac{1}{2}\pi\pi^{ik}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa}\nabla_m(\lambda^m\pi^{ik}) - \frac{1}{2\kappa}\pi^{km}\nabla_m\lambda^i - \frac{1}{2\kappa}\pi^{im}\nabla_m\lambda^k \end{aligned} \tag{53.9}$$

$$\begin{aligned} \partial_0 P_{ik} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{ik}} + \partial_m\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{ik}{}_{,m}}\right) \\ &= -\left[\left(p^{mn} - \frac{1}{2\kappa}\pi^{mn}\right)\frac{\partial u_{mn}}{\partial\pi^{ik}} + P_{mn}\frac{\partial\Lambda^{mn}}{\partial\pi^{ik}} + p^m\frac{\partial v_m}{\partial\pi^{ik}} + p^0\frac{\partial w}{\partial\pi^{ik}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa}\left[u_{ik} + \frac{\lambda}{\sqrt{J}}\pi g_{ik} - \frac{2}{\sqrt{J}}\lambda\pi_{ik} - \nabla_i\lambda_k - \nabla_k\lambda_i\right] \end{aligned} \tag{53.10}$$

$$\begin{aligned} \partial_0 p^k &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda_k} \\ &= -\left[\left(p^{mn} - \frac{1}{2\kappa}\pi^{mn}\right)\frac{\partial u_{mn}}{\partial\lambda_k} + P_{mn}\frac{\partial\Lambda^{mn}}{\partial\lambda_k} + p^m\frac{\partial v_m}{\partial\lambda_k} + p^0\frac{\partial w}{\partial\lambda_k}\right] + \frac{1}{\kappa}\nabla_i\pi^{ki} \end{aligned} \tag{53.11}$$

$$\begin{aligned} \partial_0 p^0 &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} \\ &= -\left[\left(p^{mn} - \frac{1}{2\kappa}\pi^{mn}\right)\frac{\partial u_{mn}}{\partial\lambda} + P_{mn}\frac{\partial\Lambda^{mn}}{\partial\lambda} + p^m\frac{\partial v_m}{\partial\lambda} + p^0\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa}\sqrt{J}\left[\frac{\pi^2}{2J} - \frac{1}{J}\pi^{ik}\pi_{ik} - {}^{(3)}R\right] \end{aligned} \tag{53.12}$$

まず，(53.8) は (53.6) と全く同じものであって，g_{ik}, π^{ik}, λ_k, λ の時間微分が不定であることを示す．これに対して (53.9)～(53.12) を Lagrange 型の場の方程式 (51.9)～(51.12) と比較してみると次のようなくいちがいに気がつく．(53.9)～(53.12)

の各右辺第1項 $-[\cdots]$ には u, Λ, v, w という不定関数がはいっている．もしこの項が0ならば (51.9)～(51.12) と，ここに求めた方程式とは一致することがわかる．まず $-[\cdots]$ が0となるためには各不定関数の係数が0ならよいから

$$p^{mn} = \frac{1}{2\kappa}\pi^{mn}, \qquad P_{mn} = 0, \qquad p^m = 0, \qquad p^0 = 0 \tag{53.13}$$

という条件をつければよい．この条件は実は，(53.5) をそれぞれ対応する正準共役量に等しいとおいたものにほかならない．

ここで (53.13) の解釈について少しくわしく述べよう．本節のはじめにも述べたように，p^{mn}, P_{mn}, $\cdots$ 等はすべて独立な正準共役変数であるから，一般にはこれらは0ではない．一方，(53.9) 以下に求めた場の方程式は，このままでは元の Einstein の場の方程式とは一致しない．そこで，(53.9) 以下が Einstein の方程式と一致するのは，(53.9) 以下の方程式にさらに (53.13) のような付加条件のついた場合である．それゆえ，(53.13) はいわば運動の初期条件であって，(53.9) によって示されるいろいろな運動の中で，特に (53.13) という初期条件を満足するものが，Einstein の方程式の解と一致することを意味する．(53.13) をこのように解釈するならば，次に考えねばならぬことは，この条件が時間が経過してもはたして守られているかどうかということである．それには，(53.13) の時間微分がやはり $t=0$ の瞬間に成立していなければならない．すなわち，初期条件として (53.13) のほかにさらに

$$\partial_0\left(p^{mn} - \frac{1}{2\kappa}\pi^{mn}\right) = 0, \qquad \partial_0 P_{mn} = 0, \qquad \partial_0 p^m = 0, \qquad \partial_0 p^0 = 0 \tag{53.14}$$

も要求しなければならない．さらにこの条件が時間的に保持されるためには (53.14) の微分もまた0とならなければならない．(53.13) のような条件を Dirac は ϕ という記号で表わしたために ϕ－方程式と呼んだ．これに対して (53.14) またその微分＝0 とした条件をすべて χ－方程式と呼んでいる．また，人によっては (53.13) を第1次条件，(53.14) を第2次条件ともいう．

さて，第1，第2次条件 (53.13)，(53.14) を使うと (53.9)～(53.12) の方程式は，(51.9) 以下と完全に一致することがわかる．たとえば，(53.9) に (53.13) および (53.14) のはじめの条件を代入すると

$$\frac{1}{2\kappa}\partial_0\pi^{ik} = \frac{1}{2\kappa}\left[\lambda\sqrt{J}\left({}^{(3)}R^{ik} - \frac{1}{2}{}^{(3)}Re^{ik}\right) + (\nabla^i\nabla^k - e^{ik}\nabla_m\nabla^m)(\sqrt{J}\cdot\lambda)\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda e^{ik}}{2\sqrt{J}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - \lambda\frac{2}{\sqrt{J}}\left(\pi^{im}\pi^k{}_m - \frac{1}{2}\pi\pi^{ik}\right)\right.$$

（次ページへつづく）

$$+\nabla_m(\lambda^m\pi^{ik})-\pi^{km}\nabla_m\lambda^i-\pi^{im}\nabla_m\lambda^k\Big]$$

となる．これは (51.9) にほかならない．同様に (53.10) は

$$u_{ik}+\frac{\lambda}{\sqrt{J}}\pi\, g_{ik}-\frac{2}{\sqrt{J}}\lambda\,\pi_{ik}-\nabla_i\lambda_k-\nabla_k\lambda_i=0$$

となる．これに (53.8) の最初の式を代入すれば，(51.10) と完全に一致する．

ここでなるべく理論を簡単にするために，(53.13) の最初の条件を取り除くことにする．その代わりに，こんごは π^{mn} はすべて $2\kappa p^{mn}$ にすりかえて π^{mn} を消去してしまう*)．したがって，π^{mn} に正準共役な P_{mn} も不要となる．そこで，Hamiltonian の中の $P_{mn}=0$ とおいて

$$\mathscr{H}=p^k v_k+p^0 w-\sqrt{J}\lambda\left[\frac{\kappa}{J}(p^{mn}g_{mn})^2-\frac{2\kappa}{J}(p^{mn}p_{mn})-\frac{1}{2\kappa}{}^{(3)}R\right]$$
$$-2\lambda_i\nabla_k p^{ki} \tag{53.7$'$}$$

となる．すなわち，独立な力学変数は g_{ik}，λ_k，λ と，これらに正準共役な p^{ik}，p^k，p^0 である．

初期条件 (53.13)，(53.14) は次のようになる．

$$p^k=0,\quad p^0=0 \tag{53.13$'$}$$

$$\partial_0 p^k=0,\quad \partial_0 p^0=0 \tag{53.14$'$}$$

(53.14)′ は場の方程式 (53.11)，(53.12) および (53.13)′ を使って書き直せば

$$\frac{1}{\kappa}\nabla_i\pi^{ki}=0 \tag{53.15}$$

$$\frac{1}{2\kappa}\sqrt{J}\left[\frac{\pi^2}{2J}-\frac{1}{J}\pi^{ik}\pi_{ik}-{}^{(3)}R\right]=0 \tag{53.16}$$

とも書ける．この (53.15)，(53.16) は Lagrange 形式の理論における束縛条件 (52.17) にほかならない．したがって，Bianchi の identity と条件 (53.15)，(53.16) を使えば，(53.15)，(53.16) の時間微分は 0 となるから，これ以上，もはや条件をつける必要はないことがわかる．しかし，Bianchi の恒等式は Lagrange 型式で出したものであるから，これに相当することを正準形式だけを使って証明しなければならない．これは § 55 において述べる．

なお，(53.7)′ に (53.13)′ および (53.15)，(53.16) を代入すると，

---

*) g_{ik} に正準共役な量，p^{ik} は $\pi^{ik}/2\kappa$ である．Γ^0_{ik} や K^{ik} を使うより π^{ik} を使う方が便利なのはこのためである．

$$\mathscr{H}=0$$

となってしまう.

§ 54.　変換の母関数と束縛条件

これから座標変換（52.8）および（52.14）について再び考えてみる．特にこの変換の母関数について調べてみよう．そのためにまず **Poisson 括弧** を定義する．巻末の付録（A.4－21）にしたがって

$$\left.\begin{aligned}&[g_{ik}(\vec{x},x^0),p^{rs}(\vec{x}',x^0)]=\frac{1}{2}(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_k^r\delta_i^s)\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\&[\lambda_k(\vec{x},x^0),p^i(\vec{x}',x^0)]=\delta_k^i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\&[\lambda(\vec{x},x^0),p^0(\vec{x}',x^0)]=\delta(\vec{x}-\vec{x}')\end{aligned}\right\}\tag{54.1}$$

と定義する．ここに書いてない組合せはすべて Poisson 括弧 が 0 とする．たとえば

$$[g_{ik}(\vec{x},x^0),\ p^r(\vec{x}',x^0)]=0$$

この Poisson 括弧 を使うと場の方程式は次のようになる．いま，g_{ik}，λ_k，λ，p^{rs}，… 等の任意の関数を $A[g_{ik},\ \lambda_k,\ \cdots]$ とすると

$$\frac{dA}{dx^0}=[A,H],\qquad H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}(x)d^3x$$

もしもAが場の量 g_{ik} や p^{ik} 等のほかに，直接に x^0 をも含む場合，すなわち

$$A=A[g_{ik},\ \cdots,\ p^{ik},\ \cdots,\ x^0]$$

のようなときは，

$$\frac{dA}{dx^0}=[A,H]+\frac{\partial A}{\partial x^0}\tag{54.2}$$

となる．この場合に x^0 は A の中に2つの形で含まれている．すなわち g_{ik}, p^{ik} 等の場の量が x^0 の関数であるために A は x^0 に間接に依存するが，そればかりでなく x^0 は A の中になまに含まれている．そこでこれら両方の x^0 を微分することを d/dx^0（左辺）で示す．これに対して A の中に直接なまに含まれている x^0 だけを微分することを $\partial/\partial x^0$（右辺）と記すことにした．

いま，Aの代わりにH自身をとると，

$$\frac{dH}{dx^0}=[H,H]+\frac{\partial H}{\partial x^0}=\frac{\partial H}{\partial x^0}$$

となる．(53.7)′ からわかるようにHの中には不定関数 v_k，w がある．これらは一般に x^0 をなまに含むかもしれないから右辺の量がでてきたわけである．すなわち

$$\frac{dH}{dx^0}=\int\left\{p^k\frac{\partial v_k}{\partial x^0}+p^0\frac{\partial w}{\partial x^0}\right\}d^3x$$

したがって，条件 (53.13)′ を使わないかぎりは，Hは運動の恒量とはならない．

さて，上の Poisson 括弧について注意しなければならないことがある．すなわち，(53.13)′ によると $p^k=0$, $p^0=0$ である．もしこの条件を (54.1) の左辺に使うと左辺は 0 であるが，右辺は 0 でないという矛盾した結果になる．同様に (53.13)′，(53.15)，(53.16) を使うと $H=0$ となる．したがって，一般に任意の場の量Aに対して

$$\frac{dA}{dx^0}=[A,H]=0$$

という馬鹿げた結果になる．これは条件の使い方が悪いからである．先にも述べたように，(53.13)′，(53.15)，(53,16) 等はすべて $x^0=0$ における条件である．これらは，場の方程式を解いて，その答にはじめて適用すべき条件である．したがって解を求める前に，まして方程式を導きだす段階でこれらを使用してはならない．

さて，ここで準備として一般の場の理論について考える．§ 26 にならって，場の量を $\varphi_A(x)$ $(A=1, 2, \cdots, N)$，その作用積分を

$$I\overset{d}{\equiv}\int_\Omega L\{\varphi_A,\varphi_{A,\mu}\}d^4x \qquad \varphi_{A,\mu}\overset{d}{\equiv}\partial_\mu\varphi_A$$

とする．いま，次のような変換を考える

$$\left.\begin{aligned}&x^\mu\to x^{\mu\prime}=x^\mu+\delta x^\mu(x)\\&\varphi_A\to\varphi_A{}'(x')=\varphi_A(x)+\delta\varphi_A\end{aligned}\right\}\tag{54.3}$$

ここで $\delta\varphi_A$ はxの関数であるばかりでなく，φをも含むものとする．すなわち

$$\delta\varphi_A=F(\varphi,x)$$

と仮定する．ただし，ここでは簡単のために φ の微分はいっさい含まれていないものとする．

さて，変換 (54.3) に対してIが不変だとすると，(26.1)′ から

$$\bar{\delta}L+\partial_\mu(L\delta x^\mu)\equiv 0$$

または書き直して

$$\begin{aligned}\delta L&\overset{d}{\equiv}L\{\varphi_A{}'(x'),\partial_\mu{}'\varphi_A{}'(x')\}-L\{\varphi_A(x),\varphi_{A,\mu}(x)\}\\&\equiv -L\cdot\partial_\mu(\delta x^\mu)\end{aligned}\tag{54.4}$$

となる．

また，場の方程式

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi_A}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\right)=0$$

を使うと，(52.5)′ で述べたように次の量は運動の恒量となる．

$$G\overset{d}{\equiv}\int\mathfrak{G}\,d^3x\overset{d}{\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}}\delta\varphi_A-T^0{}_\nu\delta x^\nu\right\}d^3x \tag{54.5}$$

ここで

$$T^0{}_\nu\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}}\varphi_{A,\nu}-\delta^0_\nu L$$

ところで，φ_A に正準共役な量を π^A とする．これらの量の間の Poisson 括弧は

$$[\varphi_A(\vec{x},x^0),\ \pi^B(\vec{x}',x^0)]=\delta^B_A\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$[\varphi_A(x),\varphi_B(x')]=[\pi^A(x),\pi^B(x')]=0$$

いま G の中にでてくる $\varphi_{A,0}$ を π^A, φ_A, $\varphi_{A,k}$ を使って書き表わすことにする．もちろん重力場のような場合には，$\varphi_{A,0}$ の中のあるものは不定であるが，そのときは，不定関数を用いて書き表わす．そうすると G は正準変数，およびその空間微分(および不定関数)だけに依存することになる．そこで，これから証明したいことは“**G は変換 (54.3) の母関数である**”ということである．すなわち

$$\left.\begin{aligned}\bar{\delta}\varphi_A(x)&=[\varphi_A(x),G]\\ \bar{\delta}\pi^A(x)&=[\pi^A(x),G]\end{aligned}\right\} \tag{54.6}$$

が成立することをこれから証明しよう．

まず $\bar{\delta}\varphi_A$の証明からはじめる．右辺は*) Poisson 括弧の定義から

$$[\varphi_A(x),G]=\frac{\delta G}{\delta\pi^A(x)}=\delta\varphi_A(x)-\frac{\delta}{\delta\pi^A(x)}\int T^0{}_\nu(x')\delta x^\nu(x')\cdot d^3x'$$

ところで

$$\frac{\delta}{\delta\pi^A(x)}\int T^0{}_k(x')\delta x^k(x')d^3x'=\int\frac{\partial}{\partial\pi^A(x)}\{\pi^B(x')\partial_{k'}\varphi_B(x')\delta x^k(x')\}d^3x'$$

$$=\partial_k\varphi_A\cdot\delta x^k.$$

$$\frac{\delta}{\delta\pi^A(x)}\int T^0{}_0(x')\delta x^0(x')\,d^3x'=\int\frac{\partial}{\partial\pi^A(x)}[\pi^B(x')\partial_0\varphi_B(x')-L]\delta x^0(x')d^3x'$$

$$=\partial_0\varphi_A(x)\cdot\delta x^0+\int\left[\pi^B\cdot\frac{\partial}{\partial\pi^A(x)}(\partial_0\varphi_B)-\frac{\partial L}{\partial\varphi_{B,0}(x')}\cdot\frac{\partial}{\partial\pi^A(x)}\left\{\varphi_{B,0}(x')\right\}\right]\delta x^0\cdot d^3x'$$

$$=\partial_0\varphi_A(x)\cdot\delta x^0+\left(\pi^B-\frac{\partial L}{\partial\varphi_{B,0}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\pi^A}(\varphi_{B,0})\cdot\delta x^0$$

---

*) 積分変数を x' としたが，これは (54.3) の x' とは全く無関係である．

この最後の項は，関係式*)

$$\pi^B = \frac{\partial L}{\partial \varphi_{B,0}}$$

のために 0 になるのが普通の場合である．重力場の例では，たとえばこの右辺 $\partial L/\partial\varphi_{B,0}$ が 0 となってしまうものがある．このようなときは，上の関係式は場の方程式としてはでてこない．しかしその代わりに

$$\pi^B = 0$$

という束縛条件がつけられる．これを，上の関係式の代わりに使えば，いずれの場合にしても

$$\frac{\partial}{\delta\pi^A}\int T^0{}_0\delta x^0 d^3x' = \partial_0\varphi_A\cdot\delta x^0$$

となる．そこで，以上の結果をまとめると

$$[\varphi_A(x), G] = \delta\varphi_A - \partial_\mu\varphi_A\cdot\delta x^\mu = \bar{\delta}\varphi_A$$

となって第 1 式は証明された．

次に第 2 式の右辺を考えよう．

$$[\pi^A(x), G] = -\frac{\delta G}{\delta\varphi_A(x)}$$

$$= -\int \pi^B(x')\frac{\partial\delta\varphi^B(x')}{\partial\varphi_A(x)}d^3x' + \frac{\delta}{\delta\varphi_A(x)}\int T^0{}_\mu(x')\delta x^\mu(x')d^3x'$$

この最後の項は次のようになる．

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_A(x)}\int T^0{}_k(x')\delta x^k(x')d^3x' = \int \pi^B(x')\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left\{\frac{\partial\varphi_B(x')}{\partial\varphi_A(x)}\right\}\delta x^k(x')\cdot d^3x'$$

部分積分により

$$= -\int \partial_{k'}\{\pi^B(x')\delta x^k(x')\}\,\delta^A_B\delta(\vec{x}'-\vec{x})d^3x' = -\partial_k(\pi^A\cdot\delta x^k).$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_A(x)}\int T^0{}_0(x')\delta x^0(x')d^3x' = \int \pi^B(x')\frac{\partial}{\delta\varphi_A(x)}\varphi_{B,0}(x')\delta x^0(x')\cdot d^3x'$$

$$-\int\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_A(x)}\delta x^0 + \frac{\partial L}{\partial\varphi_{B,k}(x')}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial\varphi_B(x')}{\partial\varphi_A(x)}\right)\cdot\delta x^0\right.$$

$$\left.+\frac{\partial L}{\partial\varphi_{B,0}(x')}\frac{\partial\varphi_{B,0}(x')}{\partial\varphi_A(x)}\delta x^0\right\}d^3x' = \delta x^0\left(\pi^B(x) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_{B,0}(x)}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_{B,0}(x)}{\partial\varphi_A(x)}$$

---

*) これは，一般には正準形式に書かれた場の方程式

$$\partial_0\varphi_A = [\varphi_A, H]$$

と同じものである

$$-\delta x^0\left\{\frac{\partial L}{\partial \varphi_A}-\partial_k\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,k}}\right)\right\}+\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,k}}\partial_k\dot{\delta} x^0$$

この第1項は前に述べたことと同じ理由から0としてよい．第2項は場の方程式から次のようになる．

$$-\delta x^0\partial_0\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,0}}\right)=-\delta x^0\partial_0\pi^A+\delta x^0\partial_0\left\{\pi^A-\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,0}}\right\}$$

この最後の項も上と同じ理由から0とおけるから

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_A}\int T^0{}_0\delta x^0 d^3x'=-\delta x^0\cdot\partial_0\pi^A+\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,k}}\partial_k\delta x^0$$

そこで，以上をまとめて

$$[\pi^A(x),G]=-\pi^B\frac{\partial\delta\varphi_B}{\partial \varphi_A}-\pi^A\partial_k\delta x^k+\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,k}}\partial_k\delta x^0-\partial_\mu\pi^A\delta x^\mu \tag{54.7}$$

となる．これが $\bar{\delta}\pi^A$ に等しいかどうかを調べるには，まず $\delta\pi^A$ の形がどのようなものかを π^A の定義にもどって調べなければならない．

さて

$$\delta\pi^A(x)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial}{\partial \varphi_{A'},_0(x')}L\{\varphi_{A'}(x'),\ \partial'_\mu\varphi_{A'}(x')\}-\frac{\partial}{\partial \varphi_{A,0}(x)}L\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}(x)\}$$

これに（54.4）を代入すると，

$$=\frac{\partial \varphi_{B,\mu}(x)}{\partial \varphi_{A'},_0(x')}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi_{B,\mu}(x)}\Big[L\{\varphi_A(x),\ \partial_\nu\varphi_A(x)\}\cdot(1-\partial_\rho\delta x^\rho)\Big]-\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,0}}$$

いま

$$\pi^{B,\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{B,\mu}},\qquad \pi^{B,0}\overset{d}{\equiv}\pi^B$$

という記号を使うことにすると，

$$=\frac{\partial}{\partial \varphi_{A'},_0(x')}\{\varphi_{B'},_\mu(x')-\delta\varphi_{B,\mu}\}\cdot\pi^{B,\mu}(1-\partial_\rho\delta x^\rho)-\pi^A$$

さて，$\delta\varphi_{B,\mu}$ は次のように書ける（(25.6) 参照)．

$$\delta\varphi_{B,\mu}=\partial_\mu\delta\varphi_B-\varphi_{B,\nu}\partial_\mu\delta x^\nu=\frac{\partial\delta\varphi_B}{\partial \varphi_C}\varphi_{C,\mu}-\varphi_{B,\nu}\partial_\mu\delta x^\nu+[\partial_\mu(\delta\varphi_B)]_\varphi$$

この最後の項は，$\delta\varphi$ の中になまに含まれている x を微分することを意味する．これを上の式に代入すると

$$\delta\pi^A=\left\{\delta^A_B\delta^0_\mu-\frac{\partial\delta\varphi_B}{\partial \varphi_A}\delta^0_\mu+\delta^A_B\ \partial_\mu\delta x^0\right\}(1-\partial_\rho\delta x^\rho)\pi^{B,\mu}-\pi^A$$

$$=-\frac{\partial\delta\varphi_B}{\partial \varphi_A}\pi^B+\pi^{A,\mu}\partial_\mu\delta x^0-\pi^A\partial_\rho\delta x^\rho$$

したがって

$$\delta\pi^A = -\frac{\partial\delta\varphi_B}{\partial\varphi_A}\pi^B + \frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,k}}\partial_k\delta x^0 - \pi^A\partial_k\delta x^k - \partial_\mu\pi^A\delta x^\mu$$

これと (54.7) の右辺とくらべると完全に一致している．したがって (54.6) は証明されたことになる．

さて，重力場の場合には変換

$$\left.\begin{aligned} &x^k \to x^{k\prime} = x^k + \xi^k(x^0, \cdots x^3) \\ &x^0 \to x^{0\prime} = x^0 \end{aligned}\right\} \tag{52.8}$$

に対しては G は (52.13) にあたえられているように*)

$$G_1 = \int\frac{1}{\kappa}(\xi^i\nabla_k\pi^k{}_i)d^3x = \int\xi_i\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_i}d^3x \tag{52.13}$$

となる．また，曲面 $x^0 =$ 一定 を変形させる変換

$$\left.\begin{aligned} &x^k \to x^{k\prime} = x^k \\ &x^0 \to x^{0\prime} = x^0 + \xi(x^0, x^1, \cdots, x^3) \end{aligned}\right\} \tag{52.14}$$

に対しては G は (52.18) から

$$G_2 = \int\xi\left\{\lambda\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda} + \lambda_i\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_i}\right\}d^3x \tag{52.18}$$

となる．(52.13), (52.18) を求める際に Lagrange 形式の理論では

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda_{k,0}},\ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda_{,0}}$$

はともに 0 としたが，正準変数を使って G を表わすときには，これらはそれぞれ，p^k, p^0 であって，省略してはならない．これらは，すべての計算の終ったあとで，はじめて条件 (53.13)′ によって 0 とおくべきものである．そこで，上の G_1, G_2 のもとの定義にしたがって，これらを次のように変更する．

$$\begin{aligned} G_1 &\overset{d}{\equiv} \int\{p^k\delta\lambda_k + p^0\delta\lambda - \xi^k(p^i\cdot\partial_k\lambda_i + p^0\cdot\partial_k\lambda)\}d^3x + \int\xi_i\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_i}d^3x \\ &= \int p^k(-\xi^m{}_{,k}\lambda_m - \xi^m{}_{,0}g_{mk})d^3x - \int\xi^k(p^i\cdot\partial_k\lambda_i + p^0\cdot\partial_k\lambda)d^3x + \int\xi_i\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_i}d^3x \end{aligned} \tag{54.8}$$

$$G_2 \overset{d}{\equiv} \int\{p^k\delta\lambda_k + p^0\delta\lambda - \xi(p^iv_i + p^0w)\}d^3x + \int\xi\left\{\lambda\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda} + \lambda_i\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_i}\right\}d^3x$$

---

*) § 52 では $\delta\mathfrak{L}_1/\delta\lambda_i$ としてあるが，$\mathfrak{L}_1$ の代わりに § 53 で定義した $\mathfrak{L}$ としても同じである．

$$= \int \left[p^k \{ -\xi_{,0}\lambda_k - \xi_{,k}(\lambda^m \lambda_m - \lambda^2) \} + p^0 \{ -\xi_{,0} \cdot \lambda + \xi_{,m}\lambda^m \cdot \lambda \} \right] d^3x$$

$$- \int \xi (p^i v_i + p^0 w)\, d^3x + \int \xi \left(\lambda \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda} + \lambda_i \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda_i} \right) \cdot d^3x \qquad (54.9)$$

もしも束縛条件

$$p^k = 0, \qquad p^0 = 0 \qquad (54.10)$$

を使えば，これらはそれぞれもとの G_1，G_2 と同じものになる．これらの G がそれぞれ変換（52.8）および（52.14）の母関数になっていることは，直接に（54.6）の関係を確かめてみればわかる．たとえば変換（52.8）に対する p^{ab} の変分を求めてみよう．（54.6）にしたがって

$$[p^{ab}, G_1] = -\int p^k(x'), \xi^m{}_{,0}(x')[p^{ab}(x), g_{mk}(x')] d^3x'$$

$$+ \frac{1}{\kappa} \int \xi_i(x')[p^{ab}(x), \nabla_k{}' \pi^{ki}(x')] d^3x'$$

$$= \frac{1}{2}(p^a \xi^b{}_{,0} + p^b \xi^a{}_{,0}) + \frac{1}{\kappa} \int \xi_i(x')[p^{ab}(x), e^{ij}(x')] \Gamma_{kl,j}(x') \pi^{kl}(x') d^3x'$$

$$+ \frac{1}{2\kappa} \int \xi^j(x') \pi^{kl}(x') \left[p^{ab}(x), \{ g_{jk,l}(x') + g_{lj,k}(x') - g_{kl,j}(x') \} d^3x' \right] d^3x'$$

$$= \frac{1}{2}(p^a \xi^b{}_{,0} + p^b \xi^a{}_{,0}) + \frac{1}{2\kappa}[\xi^a \nabla_l \pi^{bl} + \xi^b \nabla_l \pi^{al}]$$

$$+ \frac{1}{2\kappa}(\partial_l \xi^a \cdot \pi^{bl} + \partial_l \xi^b \cdot \pi^{al} - \partial_l \xi^l \cdot \pi^{ab} - \partial_l \pi^{ab} \cdot \xi^l)$$

これに束縛条件（54.10）および（53.15）を使えば第 1，第 2 項は 0 となって

$$[2\kappa p^{ab}, G_1] = [\pi^{ab}, G_1] = \delta \pi^{ab} - \partial_l \pi^{ab} \cdot \xi^l = \bar{\delta} \pi^{ab}$$

G_2 の場合は計算がもっとめんどうであるが，やはり同様に証明できる．

さて，ξ^m，ξ が空間の遠方ではやく 0 になるとすれば部分積分によって G_1，G_2 は次のように書きかえられる．

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \int \{ \xi^m \mathfrak{A}_m - \xi^m{}_{,0} \mathfrak{B}_m \} d^3x \\ G_2 &= \int \{ \xi \mathfrak{A} - \xi_{,0} \mathfrak{B} \} d^3x \end{aligned} \right\} \qquad (54.11)$$

ここで $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 等は次のようなものである．

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_m &= \partial_k(p^k\lambda_m) - p^k\lambda_{k,m} - p^0\cdot\partial_m\lambda + g_{im}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_i} \\
\mathfrak{B}_m &= p^k g_{mk} \\
\mathfrak{A} &= \partial_k\{p^k(\lambda^m\lambda_m - \lambda^2) - p^0\lambda\cdot\lambda^k\} - p^k v_k - p^0 w \\
&\quad + \lambda\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda} + \lambda_k\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_k} \\
\mathfrak{B} &= p^k\lambda_k + p^0\lambda
\end{aligned}\right\} \tag{54.12}$$

ところですでに何度も述べたように，われわれには4種類の束縛条件

$$\left.\begin{aligned}
p^k = 0, \qquad p^0 = 0 \\
\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_k} = 0, \qquad \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{54.13}$$

がある．この4種類の条件の適当な1次結合（係数には λ とか g_{ik} が含まれている）が(54.12) の4種類の量である．そこで (54.13) の代わりに

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_m = 0, \qquad \mathfrak{B}_m = 0 \\
\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{54.14}$$

を束縛条件として用いることができる．実際 (54.13) が成立すれば (54.14) も成立するし，その逆もまた成り立つ．

§ 55. 正準理論の不変性

前節までに述べたことから，Einstein の理論は2つの形式に書き表わされることがわかった．すなわち，1つは Lagrange 形式であり，もう1つは正準形式である．前者では，時間，空間を区別せず，すべての量は4次元世界の立場から取扱われ，理論全体の一般座標変換に対する不変性は一目瞭然である．これに対して後者すなわち正準形式では時間と空間とは区別され，すべての物理量はある時刻における3次元的空間の中の量として取扱われる．したがって，理論全体は $x^0 =$ 一定 という超曲面の設定の仕方に強く結びついている．したがって座標変換に対して，正準形式に書かれた理論が全体として不変であるかどうかは，あらためて調べてみる必要がある．

この両形式のちがいとしてはさらに束縛条件がある．正準形式に書かれた場の方程式は，Lagrange 形式に書かれた方程式とは一致しない．この両者が一致するためには，束縛条件 (54.13) またはこれと同等な (54.14) を使わなければならない．

これから便宜上，記号について次のような約束をする．まず座標変換については (52.8) と (52.14) を一緒にして

$$x^{\mu} \to x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^0,\ x^1,\ \cdots,\ x^3) \tag{55.1}$$

とする．すなわち，いままでの ξ を ξ^0 と書きかえる．これに応じて

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_0, \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_0$$

と書くことにする．そうすると，変換（55.1）に対する母関数は，G_1，G_2 を一緒にして

$$G \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} \{\xi^{\mu}\cdot\mathfrak{A}_{\mu} - \xi^{\mu}{}_{,0}\mathfrak{B}_{\mu}\} d^3x \tag{55.2}$$

となる．

束縛条件を使ったときに，はじめて成立する関係式は $\approx$ で示すことにする．これに対して，条件に無関係に成立する関係式は従来どおり $=$ で表す．それゆえ，束縛条件自身は

$$\mathfrak{A}_{\mu}(\vec{x},\ x^0) \approx 0, \qquad \mathfrak{B}_{\mu}(\vec{x},\ x^0) \approx 0 \tag{55.3}$$

となる．

（55.2）で定義された G は変換（55.1）の母関数である．したがって，任意の力学変数 Φ に対して，

$$\bar{\delta}\Phi \approx [\Phi, G] \tag{55.4}$$

となる．ここで $=$ の代わりに $\approx$ を使ったのは，上の関係式を証明するのに束縛条件が必要であるからである．このことは前節で示した例，すなわち $\bar{\delta}p^{ab}$ を求めた場合をふりかえってみればすぐにわかる．もしも Φ が力学変数だけでなく，座標 x^{μ} をなまに含むときは，上の関係式は

$$\bar{\delta}\Phi \approx [\Phi, G] + \bar{\delta}_e\cdot\Phi \tag{55.4$'$}$$

となる．この右辺の第1項は Φ の中の力学変数の変換にもとづく Φ の変分を示し，第2項はなまに含まれた x のためにひき起こされる Φ の変分である．

（55.4)$'$ の $\approx$ を $=$ で表すと，一般に次のようになる．

$$\bar{\delta}\Phi = [\Phi, G] + \bar{\delta}_e\cdot\Phi + \mathfrak{A}_{\mu}\cdot X^{\mu} + \mathfrak{B}_{\mu}\cdot Y^{\mu} \tag{55.4$''$}$$

この右辺にある X^{μ}, Y^{μ} は，Φ によって決まる量で，もちろん ξ^{μ} またはその微分の1次式で，一般には力学変数にも依存する．たとえば，上に述べた $\Phi = p^{ab}$ の場合には

$$\delta p^{ab} = [p^{ab}, G_1] - \frac{1}{2}(p^a\cdot\xi^b{}_{,0} + p^b\cdot\xi^a{}_{,0}) - \frac{1}{2\kappa}(\xi^a\cdot\nabla_l\pi^{lb} + \xi^b\cdot\nabla_l\pi^{la})$$

また，変換（52.14）の場合には

$$\bar{\delta}p^{ab} = [p^{ab}, G_2] - \frac{\xi^0}{2\kappa}(\lambda^a\cdot\nabla_l\pi^{lb} + \lambda^b\cdot\nabla_l\pi^{la})$$

$$+ \xi^0{}_{,k}\cdot p^k\cdot\lambda^a\lambda^b - \frac{1}{2}\xi^0{}_{,k}(\lambda^a\cdot e^{kb} + \lambda^b\cdot e^{ka})\lambda\cdot p^0$$

（次ページへつづく）

$$-\xi^0\left(p^k\cdot\frac{\partial v_k}{\partial g_{ab}}+p^0\cdot\frac{\partial w}{\partial g_{ab}}\right)$$

さて，Lagrange 形式では (52.4) から

$$\frac{dG}{dx^0}\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\left[\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{ik}}\bar{\delta}g_{ik}+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\pi^{ik}}\bar{\delta}\pi^{ik}+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda_k}\bar{\delta}\lambda_k+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda}\bar{\delta}\lambda\right]=0$$

となった．しかし，正準形式の場の方程式は，さきにも述べたように，Lagrange 形式の方程式とは束縛条件だけくいちがうから，上の等式は正準形式では

$$\frac{dG}{dx^0}\approx 0 \tag{55.5}$$

にすりかわる．

ここで注意すべきことがある．すなわち，座標変換 (55.1) による力学変数 Φ の変換

$$\Phi(x)\to\Phi'(x)\equiv\Phi(x)+\bar{\delta}\Phi(x) \tag{55.6}$$

は正準変換ではないということである．このことは，たとえば変換 (52.8) に対する次の Poisson 括弧の変換をしらべてみればわかる．すなわち

$$[\lambda_i(x),p^{rs}(y)]=0$$

変換後は，(52.8)′ を使うと

$$[\lambda_i'(x),\ p^{rs\prime}(y)]=-\frac{1}{2}(\xi^r{}_{,0}\delta^s_i+\xi^s{}_{,0}\delta^r_i)\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

すなわち，Poisson 括弧の値が不変でないから，$\Phi\to\Phi+\bar{\delta}\Phi$ は正準変換ではない．

そこで，これから変換 (55.1) に対して力学変数の変換 (55.6) の代わりに，新しく

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x)\to\Phi''(x)&\overset{d}{\equiv}\Phi(x)+\bar{\varDelta}\cdot\Phi(x)\\ \bar{\varDelta}\Phi(x)&\overset{d}{\equiv}[\Phi(x),G]\end{aligned}\right\} \tag{55.6$'$}$$

を考えよう．(55.4)″ を使うと

$$\bar{\varDelta}\Phi(x)=\bar{\delta}\Phi(x)-\mathfrak{A}_\mu X^\mu-\mathfrak{B}_\mu Y^\mu\approx\bar{\delta}\Phi(x)$$

となる．つまり，束縛条件 (55.3) を使えば (55.6)′ で定義された変換は普通のテンソル変換 (55.6) と一致する．本節の考え方は要するに次のようなものである．すなわち正準形式と Lagrange 形式とは一応，別の理論で両者の方程式とか，変換規則はくいちがっていてもかまわない．ただ，束縛条件を使ったときにはじめて両者は同等な理論となればよいという考え方である．

このような考え方にもとづいて，これから次のことを示そう．

a）Poisson 括弧 (54.1) は座標変換 (55.1)，(55.6)′ に対して不変である．

b）場の方程式も a) のような座標変換に対して不変である．

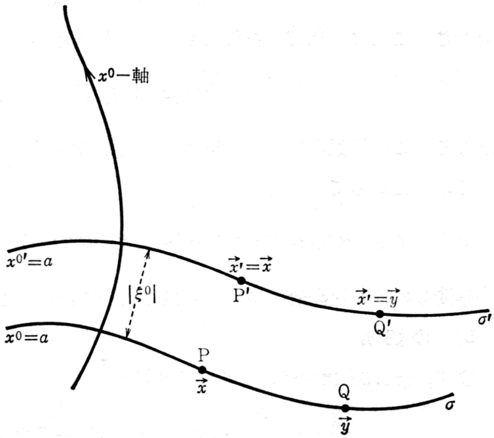
c） 束縛条件も座標変換に対して不変である．

a） の証明

いま，例として

$$[g_{ik}(\vec{x},x^0),p^{rs}(\vec{y},x^0)]=\frac{1}{2}(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_i^s\delta_k^r)\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{55.7}$$

を考えてみよう．この g_{ik} および p^{rs} はともに $x^0=$一定$=a$ という曲面 σ 上の量である．いま，変換（55.1）を行なうと，$x^{0\prime}=a$ という新しい曲面 σ' ができる．この面は**第 23 図**に示されているように，もとの曲面 σ から ξ^0 だけずれている（第 23 図では $\xi^0<0$ としたので，σ' は σ より未来の位置にある）．いま，σ 上の点 $\vec{x},\vec{y}$ をそれぞれ P，Q とする．これに対して変換後 σ' 上で新しい座標変数 $\vec{x}'$ が $\vec{x}$ と同じ数値をもつ点を P′，また $\vec{x}'$ が $\vec{y}$ と同じ値をもつ点を Q′ とする．



第 23 図

そこで，新座標系（x'－系）からみたときの物理量 g''_{ik}，$p^{rs\prime\prime}$ に対する Poisson 括弧

$$[g''_{ik}(P'),p^{rs\prime\prime}(Q')]=[g''_{ik}(\vec{x},x^{0\prime}),p^{rs\prime\prime}(\vec{y},x^{0\prime})]_{x^{0\prime}=a} \tag{55.7$'$}$$

について考えてみよう．この括弧内の量 g''_{ik}，$p^{rs\prime\prime}$ は場の方程式のたすけをかりて，σ 上の力学変数の汎関数として書き表わされるはずである．したがって，この Poisson 括弧の値は（55.7）のような σ 上の Poisson 括弧を使って計算できる．そこで，このようにして求めた（55.7）′ の値を A としよう．

一方，x'－系を基準座標系とする人がもし正準理論を § 53 の方法で作ったならば，（55.7）′ の値としては当然

$$(55.7)'=\frac{1}{2}(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_i^s\delta_k^r)\delta(\vec{x}-\vec{y})\overset{d}{\equiv}B$$

とおくはずである．そこで，A と B とが一致すれば Poisson 括弧は変換（55.1）に対して不変ということになる．

そこで，これから値 A を計算してみる．（55.6）′ を（55.7）′ に代入すると

$$[g_{ik}(\vec{x})+\bar{\varDelta}g_{ik}(\vec{x}),p^{rs}(\vec{y})+\bar{\varDelta}p^{rs}(\vec{y})]$$

$$=[g_{ik}(\vec{x}),p^{rs}(\vec{y})]+\Big[[g_{ik},G],p^{rs}\Big]+\Big[g_{ik},[p^{rs},G]\Big]$$

この最後の2項に Jacobi の恒等式

$$\Big[[A,B],C\Big]+\Big[[B,C],A\Big]+\Big[[C,A],B\Big]\equiv 0$$

を適用すると，上の式の右辺は

$$[g_{ik},p^{rs}]+\Big[[g_{ik},p^{rs}],\ G\Big]$$

となる．これに（55.7）を代入すると，上の第2項は

$$\left[\frac{1}{2}(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_i^s\delta_k^r)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}),\ G\right]$$

となる．この括弧の中の左の量は力学変数に無関係だから，Poisson 括弧の定義から0となる．したがって

$$[g_{ik}''(P'),\ p^{rs\prime\prime}(Q')]=[g_{ik}(P),p^{rs}(Q)]=\frac{1}{2}(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_i^s\delta_k^r)\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

力学変数の他の組合せについても全く同様に証明できる．

b）の証明

まず，（55.5）に（55.2）を代入すると

$$\frac{dG}{dx_0}=\int\Big[\xi^\mu\cdot\partial_0\mathfrak{A}_\mu+\xi^\mu{}_{,0}\{\mathfrak{A}_\mu-\partial_0\mathfrak{B}_\mu\}-\xi^\mu{}_{,00}\mathfrak{B}_\mu\Big]d^3x\approx 0$$

ξ^μ，およびその時間微分は σ 上の $\vec{x}$ の関数として，互いに独立に，また全く任意に選ぶことができる．このような勝手な ξ^μ, $\xi^\mu{}_{,0}$, $\xi^\mu{}_{,00}$ に対して上の式が成立するためには

$$\partial_0\mathfrak{A}_\mu\approx 0,\qquad \mathfrak{A}_\mu\approx\partial_0\mathfrak{B}_\mu,\qquad \mathfrak{B}_\mu\approx 0 \tag{55.8}$$

が成立しているはずである．そこで，これと σ 上で（55.3）が成立するという要求を一緒にすれば，結局任意の時刻に，任意の点 $\vec{x}$ において（55.3）が成立することになる．

さて，すでに（25.7）で述べたように任意の力学変数 $\varPhi(x)$ に対して

$$\partial_0\bar{\delta}\varPhi(x)=\bar{\delta}\partial_0\varPhi(x)$$

が成立する．この左辺を $\bar{\varDelta}$ を使って書き直すと

$$\partial_0\bar{\varDelta}\varPhi=\partial_0(\bar{\delta}\varPhi-\mathfrak{A}_\mu X^\mu-\mathfrak{B}_\mu Y^\mu)$$

ところで，上に述べたことから

$$\partial_0\mathfrak{A}_\mu\approx 0,\qquad \partial_0\mathfrak{B}_\mu\approx 0$$

が成立するから

$$\partial_0\bar{\varDelta}\varPhi\approx\partial_0\bar{\delta}\varPhi=\bar{\delta}\partial_0\varPhi\approx\bar{\varDelta}\partial_0\varPhi \tag{55.9}$$

この左右両辺を場の方程式および（55.6）′ を使って書き直すと

$$\partial_0[\Phi, G] \approx \bar{\varDelta}[\Phi, H]$$

この左辺は

$$\Big[[\Phi, H], G\Big] + \Big[\Phi, \frac{dG}{dx^0}\Big] \tag{55.9$'$}$$

となる．右辺は

$$\Big[[\Phi, H], G\Big] + [\Phi, \bar{\varDelta}_e H] \tag{55.9$''$}$$

となる．ここで $\bar{\varDelta}_e H$ とは次のようなものである．まず H は力学変数のみならず不定関数 v_k, w をも含む．これらは全く不定ではあるが，座標変換に対してはそれらの変換規則には制限がある．すなわち

$$\partial_0 \lambda_k = v_k, \quad \partial_0 \lambda = w$$

の両辺が，座標変換（55.1）に対して同じような変換規則にしたがわなければならない．一般に v_k, w は力学変数の関数であるばかりでなく，xをなまに含んでいてもかまわない．そこでこれらの変換は

$$v_k(x) \to v_k''(x) \overset{d}{\equiv} v_k(x) + [v_k, G] + \bar{\varDelta}_e v_k$$

となる．右辺全体が $\partial_0 \lambda_k$ の変換規則と一致するようになっている必要がある．この右辺の第2項は v_k の中に含まれている力学変数の変換による v_k の変分であり，第3項は，なまの x の関数としての変分を示す．wについても同様である．これらの事情を考えると H の変換は

$$\left.\begin{aligned} H \to H'' &= H + [H, G] + \bar{\varDelta}_e H \\ \bar{\varDelta}_e H &\overset{d}{\equiv} \int \{p^k \bar{\varDelta}_e v_k + p^0 \bar{\varDelta}_e w\} d^3x \end{aligned}\right\} \tag{55.11}$$

となる．

そこで，もとの関係式にもどって（55.9)′ と（55.9)″ を比べると

$$\Big[\Phi, \Big(\frac{dG}{dx^0} - \bar{\varDelta}_e H\Big)\Big] \approx 0 \tag{55.10}$$

となる．Φ は任意の力学変数でよいから，上の式から[*]

$$\frac{dG}{dx^0} = \bar{\varDelta}_e H \tag{55.10$'$}$$

となる．これに束縛条件（55.3）を使うと，（55.5）が再びでてくる．

---

[*] （55.10)′ の右辺にはさらに $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ の n 次式（$n \geq 2$）がつけ加わってもかまわない．しかし，これらの量は，任意の力学変数との Poisson 括弧を計算すると，束縛条件を使えば 0 となる．したがって，このような量は $=0$ とみなしてかまわない．

さて，(55.9) から

$$\partial_0\Phi''=\partial_0\{\Phi+\bar{\varDelta}\Phi\}\approx[\Phi,H]+\bar{\varDelta}[\Phi,H]$$

この右辺は $\bar{\varDelta}$ の2次以上を無視すれば

$$[\Phi+\bar{\varDelta}\Phi,\ H+\bar{\varDelta}H]=[\Phi'',H'']$$

となるから

$$\partial_0\Phi''(x)\approx[\Phi''(x),H''] \tag{55.12}$$

ここで H'' は (55.11) の定義からわかるように，H の中に出てくる力学変数および v_k, w をすべて $''$ のついた量におきかえたものである．また，Poisson 括弧の不変性はすでに証明したとおりである．したがって，(55.12) の方程式の形は変換前のそれと全く同じである．

c）の証明

まず，変換 (55.6) は連続無限個のパラメーターをもった Lie 群であることに注目しよう．たとえば，付録 § A.4 にならって全3次元空間を無数の小さな立方体に分割する．各立方体の位置は，原点から何番目の位置にあるかを示す3個の整数 (n_1,n_2,n_3) で示される．いま，点 $\vec{x}$ を包む立方体の位置を (n_1,n_2,n_3) とするとき

$$\xi^\mu(\vec{x})\to\varepsilon^\mu(n_1,\ n_2,\ n_3)\overset{d}{\equiv}\varepsilon^\mu(\vec{n})$$

と書きかえる．$\xi^\mu{}_{,0}(\vec{x})$ についても同様に

$$\xi^\mu{}_{,0}(\vec{x})\to\delta^\mu(n_1,n_2,n_3)\overset{d}{\equiv}\delta^\mu(\vec{n})$$

と書く．

小立方体の体積を $\varDelta^3$ とすると，変換の母関数 G は

$$G\to\sum_{n_1,n_2,n_3}(\varDelta)^3\cdot\{\varepsilon^\mu(\vec{n})\cdot\mathfrak{A}_\mu(\vec{n})-\delta^\mu(\vec{n})\cdot\mathfrak{B}_\mu(\vec{n})\}$$

のように書きかえられる．この G からも想像できるように，変換 (55.6) は $\infty^3\times 8$ 個のパラメーター ε^μ, δ^μ をもった Lie 群と考えられる．

話をもとにもどして，変換(55.6) と (55.6)′ との関係，すなわち $\bar{\delta}\approx\bar{\varDelta}$ を考えると，(55.6)′ で定義される変換も Lie 群となる．ただし，変換 (55.6) について成り立つ関係式（たとえば無限小母関数に関する Lie の基本定理）は (55.6)′ の場合には $\approx$ の意味で成立することになる．

いま，母関数 G が任意関数 $\xi^\mu(x)$ の汎関数であることを明示するために $G(\xi)$ と書くことにする．任意の力学変数 $\Phi(x)$ に対して変換 (55.6)′ を考えよう．

$$\Phi \to T(\xi)\cdot\Phi \overset{d}{\equiv} \Phi + [\Phi, G(\xi)] \tag{55.13}$$

これにさらに第2の変換 $T(\eta)$ を行なうと

$$\begin{aligned} T(\xi)\cdot\Phi \to T(\eta)\cdot T(\xi)\cdot\Phi &\overset{d}{\equiv} T(\xi)\cdot\Phi + [T(\xi)\cdot\Phi, G(\eta)] \\ &= \Phi + [\Phi, G(\xi)] + [\Phi, G(\eta)] + \Big[[\Phi, G(\xi)], G(\eta)\Big] \end{aligned}$$

となる．

もしこの2つの変換の順序を逆にすると，その結果は上の結果と一般には一致しない．その差は

$$T(\eta)\cdot T(\xi)\cdot\Phi - T(\xi)\cdot T(\eta)\cdot\Phi = \Big[[\Phi, G(\xi)], G(\eta)\Big] - \Big[[\Phi, G(\eta)], G(\xi)\Big]$$

ところで，変換 (55.6)′ は束縛条件を使えば Lie 群となるから，Lie の基本定理により，上に求めた差は必ずまた (55.13) のタイプの変換になっているはずである．すなわち

$$\Big[[\Phi, G(\xi)], G(\eta)\Big] - \Big[[\Phi, G(\eta)], G(\xi)\Big] \approx \Big[\ \Phi, G(\zeta)\Big] \tag{55.14}$$

ここで ζ は ξ, η およびそれらの時間微分から作られる双1次式で，この関係は Lie 群の構造から決められる．

(55.14) の左辺を Jacobi の恒等式を使って書き直すと

$$\Big[\Phi, [G(\xi), G(\eta)]\Big] \approx \Big[\Phi, G(\zeta)\Big]$$

となる．Φ は任意の力学変数であるから，結局上の関係は*)

$$\Big[G(\xi), G(\eta)\Big] = G(\zeta) \tag{55.15}$$

となる．この左辺は $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\nu$ から作られる4つの異なるタイプの Poisson 括弧の1次結合となっている．その係数は ξ, η の積である．右辺の ζ もまた先に述べたように ξ, η (またはそれらの時間微分) の双1次式であるから，両辺の ξ, η の同じ形の積を比べると $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対する Lie の関係式がでてくる．たとえば

$$\begin{aligned} \Big[\mathfrak{A}_\mu(\vec{x},\ x^0), \mathfrak{B}_\nu(\vec{y},\ x^0)\Big] &= \int C^\lambda_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})\mathfrak{A}_\lambda(\vec{z}, x^0)d^3z \\ &\quad + \int D^\lambda_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})\cdot\mathfrak{B}_\lambda(\vec{z}, x_0)d^3z \end{aligned}$$

のようなタイプの関係式が導かれる．右辺の $C^\lambda_{\mu\nu}$．$D^\lambda_{\mu\nu}$ は力学変数には無関係で，これらは Lie 群の性質だけから決まるもので，**群の構造定数**と呼ばれる．実際に計算してみるとわかるが，これらの関数は，$\delta(\vec{x}-\vec{y})$ や，それらの微分の積から作られる．上の式の左辺が他の組合せのときでも，上と似た関係式が成立する．

---

*) この = は (55.10)′ の = と同じ意味である．

さて，これから c) の証明にうつろう．束縛条件 (55.3) は変換によって次のようになる．たとえば $\mathfrak{A}_\mu \approx 0$ については，その左辺は

$$\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}, x_0) \to \mathfrak{A}_\mu''(\vec{x}, x^0) = \mathfrak{A}_\mu(\vec{x}, x^0)$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\xi^\nu(\vec{y})\cdot[\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}), \mathfrak{A}_\nu(\vec{y})] - \xi^\nu{}_{,0}(\vec{y})\cdot[\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}), \mathfrak{B}_\nu(\vec{y})]\right\}d^3y$$

となる．この被積分項にでてきた Poisson 括弧は先に述べた Lie の基本関係式のために，結局は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の 1 次結合で表わされる．したがって，変換前に (55.3) が成立していれば，それを使うと

$$\mathfrak{A}_\mu''(\vec{x}, x^0) \approx 0$$

同様に $\mathfrak{B}_\mu'' \approx 0$ も証明できる．つまり，束縛条件は変換 (55.6)′ を行なったのちにも依然成立する．

さて，(55.3)という条件は，σ 面上の各点において同時に成立すべき条件であるから，これは $4\times2\times\infty^3$ 個の条件である．ところで，これを量子論に移すときは，これらは状態ベクトル Ψ に対する条件におきかえられる．すなわち，すべての $\vec{x}$ に対して

$$\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}, x^0)\Psi = 0, \quad \mathfrak{B}_\mu(\vec{x}, x^0)\Psi = 0$$

このような条件が両立することができるためには，量子論的演算子 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対して

$$\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}, x^0)\mathfrak{B}_\nu(\vec{y}, x^0) - \mathfrak{B}_\nu(\vec{y}, x^0)\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}, x^0) = 0 \tag{55.16}$$

が成立しなければならない*)．この関係は逆に古典論では Poisson 括弧に対する条件

$$[\mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_\nu] \approx 0 \tag{55.16$'$}$$

に相当する．つまり (55.16)′ が成立しないと，量子論に移ったときに (55.16) が成立しないことになるから，量子化できないことになる．

ところが (55.15) のおかげで (55.16)′ が成立していることがわかる．そのほかに

$$[\mathfrak{A}_\mu(\vec{x}), \mathfrak{A}_\nu(\vec{y})] \approx 0,$$
$$[\mathfrak{B}_\mu(\vec{x}), \mathfrak{B}_\nu(\vec{y})] \approx 0$$

も成立する．したがって，量子化した場合にも，状態ベクトル Ψ に対する束縛条件について，条件同士のあいだに矛盾は起こらない．

いままで述べたこと，特に (55.5) および (55.15) は，実際に正直に計算をすることによって，これらの関係式を導きだすことができる．しかしこの計算は非常にめんどうなので，いままで述べたようなまわり道をして上の関係式を導いたわけである．

---

*) (55.16) の左辺は必ずしも 0 に等しくなくてもよい．一般的にはこの左辺は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の 1 次式で書き表わされれば十分である．

§ 56. 弱い重力場への応用

いままで述べてきたことを弱い重力場の場合に適用してみよう．この場合には，場の方程式が線型になるので，いままで述べた複雑なことがらがすべて具体的になり，はっきりして，この正準形式の本筋を理解するのに好都合である．

まず，(32.1) にならって

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+\sqrt{\kappa}\,h_{\mu\nu}(x) \tag{56.1}$$

とおく．したがって

$$\lambda_k(x)=\sqrt{\kappa}\,h_{k0}(x),$$

$$\lambda(x)=1-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\cdot h_{00}(x)$$

とおきかえることになる．また，$\pi^{ik}(x)$ は § 51 の定義からわかるように，$\sqrt{\kappa}$ に比例する量であるから

$$\pi^{ik}(x)=\sqrt{\kappa}\,\varphi_{ik}$$

とおく*)．(この φ は p. 127, (32.6) の φ と全く無関係だから混同せぬこと)

この新しい記号を使って Lagrange 関数 (53.1) を書きかえてみる．まず $\sqrt{\kappa}$ の最低次（すなわち −1 次）の項は $h_{\mu\nu}$ について1次式で，しかも3次元 div の形になっているから，これは場の方程式をだすのには役立たない．次の $\sqrt{\kappa}$ に無関係の項をあつめると

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}=&\frac{1}{2}\varphi_{ik}\cdot\partial_0 h_{ik}+\frac{1}{4}h_{mm}\cdot h_{ik,ik}-\frac{1}{8}h_{mm}\cdot\Delta h_{ll}+\frac{1}{8}h_{ik}\cdot\Delta h_{ik}\\&+\frac{1}{4}h_{il,k}\cdot h_{ik,l}+\frac{1}{4}(\varphi_{mm})^2-\frac{1}{2}\varphi_{ik}\cdot\varphi_{ik}\\&-\frac{1}{4}h_{00}\cdot(h_{ik,ik}-\Delta h_{ii})+h_{0i}\cdot\partial_k\varphi_{ki}\end{aligned} \tag{56.2}$$

となる．Δ は Laplace の微分記号である．

まず変分によって (56.2) から Lagrange 形式の場の方程式をだしてみよう．それらは次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta h_{ik}}=&-\frac{1}{2}\partial_0\varphi_{ik}+\frac{1}{4}\delta_{ik}h_{lm,lm}+\frac{1}{4}h_{mm,ik}-\frac{1}{4}\delta_{ik}\Delta h_{ll}\\&+\frac{1}{4}\Delta h_{ik}-\frac{1}{4}(h_{im,mk}+h_{km,mi})-\frac{1}{4}h_{00,ik}+\frac{1}{4}\delta_{ik}\Delta h_{00}=0\end{aligned} \tag{56.3}$$

---

*) 弱い場の近似では，ラテン文字の添字の上，下の位置については区別をする必要がないから，すべて下の位置につけることにする．

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi_{ik}} = \frac{1}{2}\partial_0 h_{ik} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\varphi_{mm} - \varphi_{ik} - \frac{1}{2}(h_{0i,k} + h_{0k,i}) = 0 \tag{56.4}$$

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_{0i}} = \partial_k \varphi_{ki} = 0 \tag{56.5}$$

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_{00}} = -\frac{1}{4}(h_{ik,ik} - \varDelta h_{ii}) = 0 \tag{56.6}$$

上の式で (56.5), (56.6) は束縛条件となる．これは (51.12), (51.11) を線型近似で書き表わしたものにほかならない．

さて，§ 52 に述べた Bianchi の恒等式，特にそれに場の方程式を適用して書き直した関係式 (52.11)′ および (52.16) を，線型近似の場合について確かめてみよう．まず (52.11)′ の右辺はこの近似では 0 となるから，(51.11)′ は次のようになる．

$$\partial_0\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda_l}\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\partial_0\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_{0l}}\right) = 0$$

一方，この左辺に (56.5) および (56.3) を代入すると，確かに上の式は正しいことがわかる．同様に (52.16) を線型近似で書くと

$$\partial_0\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda}\right) = \partial_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda_i}\right)$$

これは，われわれの場合の

$$\partial_0\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\partial h_{00}}\right) = -\frac{1}{2}\partial_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_{0i}}\right)$$

にほかならない．この関係が正しいかどうかを調べるために，その左右両辺に，それぞれ (56.6), (56.5) の左辺を代入してみる．さらに方程式 (56.4) を使うと，上の左右両辺が一致していることがわかる．

これから正準形式に移ろう．いま h_{ik}, h_{0k}, h_{00} に正準共役な量を，p^{ik}, p^{0k}, p^{00} とする．Poisson 括弧を

$$\left.\begin{aligned}
&[h_{ik}(\vec{x}, x^0), p^{rs}(\vec{y}, x^0)] = \frac{1}{2}(\delta_i^r\delta_k^s + \delta_i^s\delta_k^r)\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[h_{0i}(\vec{x}, x^0), p^{0k}(\vec{y}, x^0)] = \delta_i^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[h_{00}(\vec{x}, x^0), p^{00}(\vec{y}, x^0)] = \delta(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}\right\} \tag{56.7}$$

とする．

Hamiltonaian は

$$\mathscr{H} \overset{d}{\equiv} p^{0k}v_{0k} + p^{00}w_{00} - \frac{1}{4}h_{mm}\cdot h_{ik,ik} + \frac{1}{8}h_{mm}\cdot \Delta h_{ll}$$
$$- \frac{1}{8}h_{ik}\Delta h_{ik} - \frac{1}{4}h_{il,k}h_{ik,l} - (p^{mm})^2 + 2(p^{ik}\cdot p^{ik})$$
$$+ \frac{1}{4}h_{00}(h_{ik,ik} - \Delta h_{ii}) - 2h_{0i}\partial_k p^{ki} \qquad (56.8)$$

となる．ここで v_{0k}, w_{00} は不定関数である．

(56.7) と (54.1) とを比べると，一般論にでてきた (p^{ik}, p^k, p^0) を線型近似の量 (p^{ik}, p^{0k}, p^{00}) におきかえるのには，次のようにすればよいことがわかる．

$$p^{ik} \to \frac{1}{\sqrt{\kappa}}p^{ik}, \qquad p^k \to \frac{1}{\sqrt{\kappa}}p^{0k}, \qquad p^0 \to -\frac{2}{\sqrt{\kappa}}p^{00} \qquad (56.9)$$

上のおきかえで，→印の左側の量は一般論にでてきたもの，右側の量は，線型近似における量である．また $g_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ の関係から，不定関数 v_k, w についても

$$v_k \to \sqrt{\kappa}\, v_{k0}, \quad w \to -\frac{\sqrt{\kappa}}{2}w_{00} \qquad (56.9)'$$

とすればよいことがわかる．

さて，これから一般座標変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \xi^\mu \overset{d}{\equiv} x^\mu + \sqrt{\kappa}\,\eta^\mu(x) \qquad (56.10)$$

を考えてみる．これに応じて $h_{\mu\nu}$ は

$$\bar{\delta}h_{\mu\nu} = -\eta_{\mu,\nu} - \eta_{\nu,\mu} \qquad (56.11)$$

となる．また，φ_{ik} の変換は線型近似では (52.8)′ に相当するものは無視される．一方，(52.14)′ に対しては

$$\bar{\delta}\varphi_{ik} = -\partial_i\partial_k\eta^0 + \delta_{ik}\Delta\eta^0$$

あるいは p^{ik} を使って書くと

$$\bar{\delta}p^{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\Delta\eta^0 - \frac{1}{2}\partial_i\partial_k\eta^0 \qquad (56.11)'$$

上の変換の母関数は，(54.11)，(54.12) を，(56.9)，(56.9)′ の規則にしたがって線型近似に書きかえればよい．その結果は下のようになる．

$$\mathfrak{A}_m \overset{d}{\equiv} \frac{2}{\sqrt{\kappa}}\partial_k p^{km}, \qquad \mathfrak{B}_m \overset{d}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}p^{m0},$$

$$\mathfrak{A}_0 \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\partial_m p^{m0} + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}(h_{li,li} - \Delta h_{ii}), \qquad \mathfrak{B}_0 \overset{d}{\equiv} -\frac{2}{\sqrt{\kappa}}p_{00},$$

$$G = \int\left[2\partial_k p_{km}\cdot\eta^m + \left\{\frac{1}{2}(h_{li,li} - \Delta h_{ll}) - \partial_m p^{m0}\right\}\eta^0\right]d^3x$$ （次ページへつづく）

$$-\int(p^{m0}\cdot\partial_0\eta^m-2p^{00}\cdot\partial_0\eta^0)d^3x \tag{56.12}$$

となる．このGと場の量との Poisson 括弧を計算すると，確かに変換（56.11）（56.11)′がでてくることが確かめられる．

束縛条件は（55.3）にしたがって

$$\mathfrak{A}_\mu\approx 0,\qquad \mathfrak{B}_\mu\approx 0 \tag{56.13}$$

となる．これが次の8個の条件

$$p^{\mu 0}\approx 0,\qquad \partial_k p^{ki}\approx 0,\ \ h_{li,li}-\varDelta h_{ll}\approx 0 \tag{56.13′}$$

と同等であることは容易にわかる．また（56.13)′の条件のどの2組をとっても，それらの左辺の Poisson 括弧を計算すると ≈ 0 になることがわかる．また

$$\frac{dG}{dx^0}\approx 0$$

も容易に証明できる．

以上で一般論に述べたことは，すべて線型近似で書き直したことになる．そこで話を1歩進めて，束縛条件（56.13）または（56.13)′を使って，独立でない場の量の成分を消去することを考えよう．

まず，2個の添字をもつ量 $f_{ik}=f_{ki}$ を考えよう．f_{ik} は必ずしもテンソルである必要はない．これは添字の対称性から6個の独立な成分をもっている．この f_{ik} を次のように書き表わすことが必ずできる．

$$f_{ik}=f^T_{ik}+\partial_i f_k{}^T+\partial_k f_i{}^T+\partial_i\partial_k f^{(1)}+\delta_{ik}f^{(2)} \tag{56.14}$$

ここで

$$\partial_i f^T_{ik}=\partial_k f^T_{ik}=0,\ \ f^T_{ii}=0,\ \ f^T_{ik}=f^T_{ki}, \tag{56.15}$$

$$\partial_i f_i{}^T=0 \tag{56.16}$$

とする．したがって f^T_{ik} の独立な成分の数は2個である．同様に $f_i{}^T$ も2個の成分をもつ．したがって，6個の成分をもつ f_{ik} は2個の成分をもつ f^T_{ik}，および $f_i{}^T$ と，さらに2個の独立な関数 $f^{(1)}$，$f^{(2)}$ の合計6個に分解されたことになる．これらの新しいfをもとの f_{ik} で書き表わすことは容易にできる．すなわち，（56.14）に $\partial_i\partial_k$ を掛けると，（56.15），（56.16）のために，

$$\partial_i\partial_k f_{ik}=\varDelta\cdot\varDelta f^{(1)}+\varDelta f^{(2)}$$

また，（56.14）に $\varDelta\delta_{ik}$ を掛けると

$$\Delta f_{ii}=\Delta\Delta f^{(1)}+3\Delta f^{(2)}$$

そこで，上の2つの式から

$$\left.\begin{aligned} f^{(1)}&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\Delta\Delta}\partial_k\partial_l f_{kl}-\frac{1}{\Delta}f_{kk}\right)\\ f^{(2)}&=\frac{1}{2}\left(f_{kk}-\frac{1}{\Delta}\partial_k\partial_l f_{kl}\right)\end{aligned}\right\}\tag{56.17}$$

となる． $1/\Delta$ という記号は，Leplace の方程式の Green 関数のことである．すなわち，

$$\Delta G(\vec{x}-\vec{x}')=\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

とするとき，G に対して適当な境界条件（たとえば無限遠方では $G\to 0$）をつければ G は決まる．このGのことを

$$G(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{\Delta}$$

と記したわけである．したがって，

$$\frac{1}{\Delta}f_{kk}(\vec{x})\overset{d}{\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}G(\vec{x}-\vec{x}')f_{kk}(\vec{x}')d^3x'$$

のことである．たとえば，$|\vec{x}-\vec{x}'|\to\infty$ で $G\to 0$ という境界条件をつければ

$$\frac{1}{\Delta}\overset{d}{\equiv}G(\vec{x}-\vec{x}')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

となる．(56.17) では境界条件を具体的に示さなかったが，問題に応じて適当にえらべばよい．

さて，$f_i{}^T$ についても (56.14) に ∂_k を掛けると

$$\partial_k f_{ki}=\Delta f_i{}^T+\Delta\partial_i f^{(1)}+\partial_i f^{(2)}$$

この $f^{(1)}$，$f^{(2)}$ に (56.17) を使えば

$$f_i{}^T=\frac{1}{\Delta}\partial_k f_{ki}-\frac{1}{\Delta\Delta}\partial_i\partial_k\partial_l f_{kl}\tag{56.18}$$

そこで (56.17)，(56.18) を (56.14) に代入すれば，f_{ik}^T が求まる．

そこで，この分解法を h_{ik}，p^{ik} に適用して

$$\left.\begin{aligned} h_{ik}&=h_{ik}^T+\partial_i h_k{}^T+\partial_k h_i{}^T+\partial_i\partial_k h^{(1)}+\delta_{ik}h^{(2)}\\ p^{ik}&=p_{ik}^T+\partial_i p_k{}^T+\partial_k p_i{}^T+\partial_i\partial_k p^{(1)}+\delta_{ik}p^{(2)}\end{aligned}\right\}\tag{56.19}$$

とおく．

この表現を使うと，(56.13)′ の最後の条件は，

$$-2\varDelta h^{(2)}=0 \tag{56.20}$$

となる．いま，無限遠方で時空が Minkowski 型となるという条件を使うと，$\vec{x}\to\infty$ で $h_{ik}\to 0$ となる．したがって (56.20) の答は

$$h^{(2)}=0 \tag{56.20$'$}$$

次に (56.13′) の2番目の条件を考えよう．これは

$$\varDelta p_i{}^T+\varDelta\partial_i p^{(1)}+\partial_i p^{(2)}\approx 0 \tag{56.21}$$

これに ∂_i を掛けると

$$\varDelta(\varDelta p^{(1)}+p^{(2)})\approx 0$$

そこで，上に述べた時空に対する境界条件から

$$\varDelta p^{(1)}+p^{(2)}=0 \tag{56.22}$$

としてよい．これを (56.21) に代入して

$$\varDelta p_i{}^T\approx 0$$

すなわち

$$p_i{}^T=0 \tag{56.22$'$}$$

となる．

したがって*)

$$\left.\begin{aligned} h_{ik}&=h_{ik}^T+\partial_i h_k{}^T+\partial_k h_i{}^T+\partial_i\partial_k h^{(1)}\\ p^{ik}&=p_{ik}^T+(\partial_i\partial_k-\delta_{ik}\varDelta)p^{(1)}\end{aligned}\right\} \tag{56.23}$$

となる．

さて，束縛条件を使うと，場の方程式 (56.3)，(56.4) も簡単になる．まず，(56.4) は正準形式では

$$\frac{1}{2}\partial_0 h_{ik}+\delta_{ik}p_{mm}-2p_{ik}-\frac{1}{2}(h_{0i,k}+h_{0k,i})=0 \tag{56.4$'$}$$

この左辺に (56.23) を代入して $i=k$ として和をとると

$$\frac{1}{2}\varDelta_0 h^{(1)}-2\varDelta p^{(1)}-\partial_k h_{0k}=0 \tag{56.24}$$

また，(56.4)′ に ∂_k を掛けると

$$\frac{1}{2}\varDelta\partial_0 h_i{}^T+\frac{1}{2}\varDelta\partial_0\partial_i h^{(1)}-2\varDelta\partial_i p^{(1)}-\frac{1}{2}\varDelta h_{0i}-\frac{1}{2}h_{0k,ki}=0$$

---

*) (56.23) の形は束縛条件を使った結果であるから ≈ とするべきである．しかしこの条件は使用ずみで再びでてこないから，今後は ＝ におきかえる．

これに (56.24) を代入して最後の項を $p^{(1)}$ で書く．そうすると h_{0i} について解ける形になる．すなわち

$$h_{0i}=\partial_0 h_i{}^T+\frac{1}{2}\partial_0\partial_i h^{(1)}-2\partial_i p^{(1)} \qquad (56.25)$$

となる．そこで，(56.25) を (56.4)′ に代入すると (56.4)′ は非常に簡単になる．すなわち

$$\frac{1}{2}\partial_0 h_{ik}^T-2p_{ik}^T=0 \qquad (56.26)$$

最後に (56.3) について同じことをくりかえそう．$\varphi_{ik}/2$ は正準形式では p_{ik} となることに注意して，まずこの式を (56.23) を使って書き直す．そこで $i=k$ として和をとると，

$$h_{00}=-4\partial_0 p^{(1)} \qquad (56.27)$$

となる．これをもとの (56.3) に代入すると

$$-\partial_0 p_{ik}^T+\frac{1}{4}\Delta h_{ik}^T=0 \qquad (56.28)$$

となる．

以上述べたことをまとめると，4 個の束縛条件 (56.13)′ から，まず 4 個の量，$h^{(2)}$，$p_i{}^T$，$p^{(2)}$ が決定された．次に 12 個の運動方程式 (56.3)，(56.4) から，4 個の量 $h_{0\mu}$ が (56.25)，(56.27) のように決定された．残りの 8 個の方程式のうちで 4 個は $h_{ik}^T \cdot p_{ik}^T$ を規定する場の方程式 (56.28)，(56.26) となった．最後に残った 4 個は $0\equiv 0$ という恒等式となって，結局 4 個の量

$$h_i=h_i{}^T+\frac{1}{2}\partial_i h^{(1)}, \qquad p^{(1)} \qquad (56.29)$$

は未定のまま残された．なお，上の恒等式というのは § 52 で述べたように Bianchi の恒等式に束縛条件を代入したものである．これは場の方程式の間に成り立つ条件つき（すなわち束縛条件のついた）恒等式である．このために (56.3)，(56.4) は見かけは 12 個の方程式であるが，実際には，独立なものは 8 個である．

ところで，再び座標変換 (56.11)，(56.11)′ をふりかえってみよう．まず (56.11) から

$$\bar{\delta} h_{ik}=-\eta_{i,k}-\eta_{k,i}$$

ところで，(56.23) は (56.29) の量を使って

$$h_{ik}=h_{ik}^T+\partial_i h_k+\partial_k h_i, \qquad h_i=h_i{}^T+\frac{1}{2}\partial_i h^{(1)}$$

と書ける．これと上の変換をくらべると，座標変換

$$x^{\mu} \to x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \sqrt{\kappa}\,\eta^{\mu}(x)$$

に対して

$$\left.\begin{aligned} &h_{ik}^{T} = \text{不変} \\ &h_i \to h_i{}' = h_i - \eta_i(x) \end{aligned}\right\} \tag{56.30}$$

となることがわかる．

同様に，(56.11)′ から

$$\delta p_{ik} = (\partial_i\partial_k - \delta_{ik}\Delta)\left(-\frac{1}{2}\eta^0\right)$$

これと (56.23) をくらべると，p_{ik} の変換は

$$p_{ik}^{T} = \text{不変},$$

$$p^{(1)} \to p^{(1)\prime} = p^{(1)} - \frac{1}{2}\eta^0 \tag{56.30$'$}$$

ということになる．

(56.30)，(56.30)′ は h_{0i}，h_{00} に対する関係式 (56.25)，(56.27) とも矛盾しない．すなわち，(56.25) から

$$h_{0i} = \partial_0 h_i - 2\partial_i p^{(1)}$$

となる．そこで

$$\bar{\delta} h_{0i} = \partial_0 \bar{\delta} h_i - 2\partial_i \bar{\delta} p^{(1)} = -\partial_0 \eta_i + \partial_i \eta^0$$

同様に (27.27) から

$$\bar{\delta} h_{00} = -4\partial_0 \bar{\delta} p^{(1)} = 2\eta^0{}_{,0}$$

これはいずれも (56.11) と完全に一致する．

以上のことから，4個の未定関数 h_i，$p^{(1)}$ が残ることは，理論が座標変換に対して不変であるための当然の帰結であることがわかる．これらの関数を座標変換によって任意に決めることも可能である．

さて，Lagrange 関数に束縛条件を代入すると

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\varphi_{ik}^{T}\cdot\partial_0 h_{ik}^{T} + \frac{1}{8}h_{ik}^{T}\cdot\Delta h_{ik}^{T} - \frac{1}{2}\varphi_{ik}^{T}\cdot\varphi_{ik}^{T}$$

となる．このようにすべての未定関数は消えてしまう．また，Hamiltonian は

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}&=2p_{ik}^T\cdot p_{ik}^T-\frac{1}{8}h_{ik}^T\cdot\varDelta h_{ik}^T\\&=2p_{ik}^T\cdot p_{ik}^T+\frac{1}{8}\partial_l h_{ik}^T\cdot\partial_l h_{ik}^T-\partial_l\left(\frac{1}{8}h_{ik}^T\cdot\partial_l h_{ik}^T\right)\\H&=\int\mathscr{H}\,d^3x=\int\left(2p_{ik}^T\cdot p_{ik}^T+\frac{1}{8}\partial_l h_{ik}^T\cdot\partial_l h_{ik}^T\right)d^3x>0\end{aligned}\right\}\qquad(56.31)$$

となる．

最後に，Poisson 括弧は

$$\begin{aligned}\left[h_{ik}^T(\vec{x},x^0),\,p_{rs}^T(\vec{x}',x^0)\right]=\frac{1}{2}\Big[&(\delta_{ir}\delta_{ks}+\delta_{is}\delta_{kr}-\delta_{ik}\delta_{rs})\\&+(\partial_i\partial_k\delta_{rs}+\partial_r\partial_s\delta_{ik}-\partial_i\partial_r\delta_{ks}-\partial_k\partial_s\delta_{ir}\\&\qquad-\partial_i\partial_s\delta_{kr}-\partial_k\partial_r\delta_{is})\frac{1}{\varDelta}\\&+\partial_i\partial_k\partial_r\partial_s\frac{1}{\varDelta\varDelta}\Big]\delta(\vec{x}-\vec{x}')\end{aligned}\qquad(56.32)$$

となる．(56.32) をだすのには，まず h_{ik}^T の定義にもどって h_{ik}^T を h_{ik} で書き表わす．この場合，Poisson 括弧を計算する前に束縛条件を使ってはならない．p_{ik}^T についても同様に p_{ik} やその微分で表わす．それらの間の Poisson 括弧 (56.7) を使って形式的に計算すれば (56.32) となる．

正準形式に書いた方程式

$$\partial_0 h_{ik}^T=[h_{ik}^T,\,H],\qquad \partial_0 p_{ik}^T=[p_{ik}^T,\,H]$$

の右辺に (56.31)，(56.32) を使って計算すれば，確かに (56.26)，(56.28) となることがわかる．

なお，h_{ik}^T は

$$\partial_i h_{ik}^T=0,\quad h_{ii}^T=0$$

を満足し，波動方程式

$$\Box h_{ik}^T=0$$

を満足する．したがって § 33 に述べたように独立成分が 2 個の横波であることがわかる．

最後に重力場が質点系と相互作用している場合について簡単に述べる．N個の質点の座標を $z_{(a)}^{\mu}(s_a)$ $(a=1,\cdots,N)$，その質量を m_a とする．s_a は各質点の 4 次元的軌跡を

記述するのに適当なパラメターである．質点系の作用積分は

$$I_M \overset{d}{\equiv} -\sum_{a=1}^{N} m_a \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(z_{(a)})\frac{dz^{\mu}_{(a)}}{ds_a}\cdot\frac{dz^{\nu}_{(a)}}{ds_a}}\cdot ds_a \overset{d}{\equiv} \int \mathfrak{L}_M(x)d^4x$$

ここに

$$\mathfrak{L}_M(x) \overset{d}{\equiv} -\sum_{a=1}^{N} m_a \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dz^{\mu}_{(a)}}{ds_a}\frac{dz^{\nu}_{(a)}}{ds_a}}\cdot \delta^4\{x - z_{(a)}(s_a)\}\cdot ds_a \quad (56.33)$$

である．この Lagrange 関数から (18.17) にしたがって物質のエネルギー運動量テンソル密度を作ることができる．すなわち

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu}_M(x) \overset{d}{\equiv} -2\frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}(x)} = -\sum_{a=1}^{N} m_a \int \left\{-g_{\rho\sigma}(x)\cdot\frac{dz^{\rho}_{(a)}}{ds_a}\frac{dz^{\sigma}_{(a)}}{ds_a}\right\}^{-1/2}$$

$$\times\frac{dz^{\mu}_{(a)}}{ds_a}\cdot\frac{dz^{\nu}_{(a)}}{ds_a}\delta^4\{x - z_{(a)}(s_a)\}ds_a \quad (56.34)$$

ここで線型近似を使えば

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu}_M(x) = -\sum_{a=1}^{N} m_a \int \frac{dz^{\mu}_{(a)}}{ds_a}\frac{dz^{\nu}_{(a)}}{ds_a}\,\delta^4\{x - z_{(a)}(s_a)\}ds_a \quad (56.34)'$$

ここで s_a としては

$$-\eta_{\mu\nu}\frac{dz^{\mu}_{(a)}}{ds_a}\cdot\frac{dz^{\nu}_{(a)}}{ds_a} = 1$$

となるように決めた．

同様に，(56.33) も近似的に

$$\mathfrak{L}_M = -\sum_{a=1}^{N} m_a \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dz^{\mu}_{(a)}}{ds_a}\cdot\frac{dz^{\nu}_{(a)}}{ds_a}}\cdot\delta^4\{x - z_{(a)}(s_a)\}ds_a - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}h_{\mu\nu}(x),\mathfrak{T}^{\mu\nu}_M(x)$$

$$(56.35)$$

となる．そこで，質点系との相互作用を考えにいれるためには Lagrange 関数 (56.2) に (56.35) の最後の項をつけ加えておけばよい．すなわち

$$\mathfrak{L} \equiv (56.2) - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}h_{\mu\nu}\mathfrak{T}^{\mu\nu}_M(x) \quad (56.2)'$$

を Lagrange 関数として用いればよい．

これから簡単のために，各質点は近似的に静止している場合を考える．そのときには

$$\frac{dz^{0}_{(a)}}{ds_a} \approx 1, \qquad \frac{dz^{k}_{(a)}}{ds_a} \approx 0$$

としてよいから，(56.34)′ の s_a の積分が計算できて，結果は，

$$\mathfrak{T}_M^{00}(x) = -\sum_{a=1}^{N} m_a \delta(\vec{x} - \vec{z}_{(a)}) \tag{56.34}''$$

となる. $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ の他の成分は 0 となる.

そこで, h_{ik}, p^{ik} を (56.19) のように分解して, 束縛条件を調べてみる. まず, 束縛条件は (56.34)″ を仮定すると

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_{00}} = -\frac{1}{4}(h_{ik,ik} - \Delta h_{ii}) - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\mathfrak{T}_M^{00} = 0 \tag{56.35}'$$

となる. もう 1 つは前と同じである. この $\mathfrak{T}_M^{00}$ があるために (56.20)′ の代わりに

$$h^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\Delta}\cdot\mathfrak{T}_M^{00} = \sqrt{\kappa}\int G(\vec{x} - \vec{x}')\cdot\mathfrak{T}_M^{00}(\vec{x}')d^3x' \tag{56.36}$$

となる. ここで

$$\Delta G(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

とする. また, (56.27) は

$$h_{00} = -4\partial_0 p^{(1)} + \frac{\sqrt{\kappa}}{\Delta}\mathfrak{T}_M^{00} \tag{56.37}$$

となる. 最後に Lagrange 関数を横波とそれ以外の成分に分けて書くと

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\varphi_{ik}^T\cdot\partial_0 h_{ik}^T + \frac{1}{8}h_{ik}^T \Delta h_{ik}^T - \frac{1}{2}\varphi_{ik}^T\cdot\varphi_{ik}^T - \frac{\kappa}{4}\mathfrak{T}_M^{00}\cdot\frac{1}{\Delta}\mathfrak{T}_M^{00}$$

したがって, Hamiltonian は

$$H = \int\left(2p_{ik}^T p_{ik}^T + \frac{1}{8}\partial_l h_{ik}^T\cdot\partial_l h_{ik}^T\right)\cdot d^3x + \frac{\kappa}{4}\int\mathfrak{T}_M^{00}(x)G(\vec{x} - \vec{x}')\mathfrak{T}_M^{00}(x')d^3x d^3x'$$

となる. (56.34)″ および

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}(|\vec{x} - \vec{x}'|)^{-1} \qquad \kappa = 8\pi G$$

を使うと, 上の最後の項は

$$-\frac{G}{2}\sum_a^N\sum_b^N \frac{m_a, m_b}{|\vec{z}_a - \vec{z}_b|} \qquad (G:\text{Newton の万有引力定数})$$

となる. これはまさに Newton の万有引力によるポテンシャル・エネルギーである.

§ 57. 座標条件

§ 55 までで一応, 重力場の理論を正準形式に書き表わすことは完了した. しかしそれを実際問題に応用しようとすると, まず出会す問題は束縛条件

$$\mathcal{H}_i \overset{d}{\equiv} g_{ik}\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda_k} = 2\nabla_k p^{k}{}_i \approx 0 \tag{57.1}$$

$$\mathscr{H}_n \overset{d}{\equiv} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda} = \sqrt{J}\left[\frac{\kappa}{J}(p^{mn}g_{mn})^2 - \frac{2\kappa}{J}(p^{mn}p_{mn}) - \frac{1}{2\kappa}{}^{(3)}R\right] \approx 0 \qquad (57.2)$$

である．質点力学の場合とちがって，これらはともに複雑な偏微分方程式である．場の方程式を解くためには，g_{ik}, p^{ik} に対して初期値をあたえなければならない．ところがその初期値は，勝手にあたえるわけにはいかなくて，(57.1) (57.2) という4個の微分方程式を満足するようにさせなければならない．

線型近似の場合には (57.1) も (57.2) も簡単となり，これらを満足するように初期値をあたえることは実際に可能であった．すなわちこれらの条件の結果，12 個の場の量は2組の正準変数 h^T_{ik}, p^T_{ik} と4個の不定関数 $p^{(1)}$, $h_i = h_i{}^T + \partial_i h^{(1)}/2$ に還元された．力学変数 h^T_{ik}, p^T_{ik} の初期値に対する条件は

$$\partial_i h^T_{ik} = 0, \qquad h^T_{ii} = 0 \qquad (p^T_{ik} \text{ についても同様})$$

となるが，これを満足させることは決してむずかしいことではない．また不定関数 $p^{(1)}$, h_i は，線型近似のために，幸いにも，Lagrange 関数から，完全に姿を消してしまった．このようなことは，すべて線型近似のおかげである．近似を使わない厳密な理論では，(57.1) (57.2) という微分方程式を解くことは，とてもむずかしくて，場の方程式の初期条件をあたえるところで，すでに行きずまってしまう．ここで条件 (57.1) および (57.2) の意味をふりかえってみよう．いま任意の物理量 $\Phi(x)$ の時間的変化をしらべてみる．Φ は $\lambda, \lambda_i, p^0, p^i$ のような，いわば，ほんとうの物理量ではないものには無関係とする．したがって Hamiltonian (53.7)′ から

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dx^0} &= [\Phi, H] \\ &= -\int\left\{\lambda(x')[\Phi, \mathscr{H}_n(x')] + \lambda^i(x')[\Phi, \mathscr{H}_i(x')]\right\}d^3x' \qquad (57.3)\end{aligned}$$

となる．

ところで (57.3) の左辺の微分を，$x^0 = $一定 という超曲面 σ の法線方向の微分と σ 面の切線方向の微分に分解してみよう．まず σ 上の点 $\bar{x}$ における大きさが1で未来向きの法線ベクトルを $n^\mu(x)$ とすると*)

$$n^\mu = -g^{\mu 0}/\sqrt{-g^{00}}$$

---

*) 点 $\bar{x}$ の近くで，局所的に Minkowski 形になるように座標系をとると，$n^0 = 1$, $n^1 = n^2 = n^3 = 0$, となる．

である．そこで法線方向の微分は

$$\frac{d\Phi(x)}{dn(x)} \overset{d}{\equiv} n^{\mu}(x)\cdot\partial_{\mu}\Phi(x) = -\frac{g^{00}}{\sqrt{-g^{00}}}\partial_0\Phi(x) - \frac{g^{k0}}{\sqrt{-g^{00}}}\partial_k\Phi(x)$$

となる．あるいは書きなおして

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\frac{d\Phi(x)}{dn(x)} + \frac{g^{k0}}{(-g^{00})}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^k} = \lambda(x)\frac{d\Phi(x)}{dn(x)} + \lambda^k(x)\cdot\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^k}$$

となる．これと（57.3）の右辺を比べると，$\mathscr{H}_n(x')$ は σ 上の点 $\vec{x}'$ において σ の法線方向に曲面を変形させる母関数になっていることがわかる．また $\mathscr{H}_i(x')$ は σ 上の点 $\vec{x}'$ で，x^i－軸の方向に点を移動させる母関数になっている*)．このことから $\mathscr{H}_n$ は Hamiltonian の中でも，最も重要な項であることがわかる．すなわち物理量の時間的発展の ようすを規定する最も大切な項であって，Einstein の重力理論の力学的法則の本質はすべてこの $\mathscr{H}_n$ の中にふくまれているといっても過言ではない．

このことは，またつぎの事実からもわかる．すなわち

$$\mathscr{H}_n \overset{d}{\equiv} \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\lambda} = 2\lambda^{-3}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{00}} \propto G_{00} \overset{d}{\equiv} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R$$

したがって（57.2）という条件は

$$G_{00} \approx 0$$

と同じである． ところでこの条件が， どのような座標系においても成り立つためには，Einstein の方程式のすべての成分について

$$G_{\mu\nu} \approx 0$$

が成立しているときにかぎる．なぜかといえば任意の座標系で

$$G'_{00}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{0'}}G_{\mu\nu}(x) \approx 0$$

が成り立つとすると，

$$x^{\mu} = f^{\mu}(x')$$

はまったく任意の関数でよいから，結局 $G_{\mu\nu} \approx 0$ となるからである．したがって $\mathscr{H}_n \approx 0$ の条件は Einstein の方程式の全部と同等であるといってよかろう．

そこで束縛条件（57.2）を使って，場の量の中から余計な成分を消去することは，実は Einstein の方程式を解くのと同じ程度にむずかしいことである． しかも方程式の解を求めるさいには，その解が条件（57.2）を満足するようにさせなければならない．このよう

---

*) （52.13）参照．

に条件と場の方程式とが複雑にからみあっていることが，この理論の特徴であり，また問題がむずかしいことの原因もここにある．

そこで問題を少しでも容易にするために，これから特別につごうのよい座標系を使うことにする．このことは理論が座標変換に対して不変であるという大きな特徴を，少くとも見かけ上は破ることになる．これに似た考えは電磁気学でもよく用いられる．すなわち理論全体のゲージ不変性を，見かけ上すてて，特別なゲージを採用し，これによってベクトル・ポテンシャルからの縦波成分の消去を容易にするのと同じ考えである．また § 56 の線型近似を用いる場合を例にとれば，余計な不定関数 $p^{(1)}$ と h_i を例えば 0 とおくことに相当する．

さて，特別な座標系に制限するためには 4 個の条件が必要である．線型近似では，この 4 個の条件が 4 個の不定関数 $p^{(1)}$ と h_i を規定してくれる．この条件は普通**座標条件**と呼ばれる．さきにも述べたように，この条件は理論の見かけ上の不変性を破ることになるのだから，もちろん座標変換に対して不変なものでは役にたたない．つまり，これらの条件と $\mathscr{H}_i$, $\mathscr{H}_n$ との Poisson 括弧を作れば，0 にならないことが必要である．

いま座標条件を

$$Z_\mu(x) \approx 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{57.4}$$

とする．一方，簡単のために

$$Y_0(x) \overset{d}{\equiv} \mathscr{H}_n(x) \approx 0, \qquad Y_i(x) \overset{d}{\equiv} \mathscr{H}_i(x) \approx 0 \tag{57.4$'$}$$

とおくと，上に述べたことから，どの Z_ν に対しても

$$[Y_\mu(\vec{x}, x^0),\ Z_\nu(\vec{x}', x^0)] \not\approx 0 \tag{57.5}$$

となるような Y_μ が必ず存在するように，Z を選ばなければならない．

ところで量子論に移ると，§ 55 で述べたように，束縛条件 (57.4), (57.4)′ は状態ベクトル Ψ に対する条件

$$Y_\mu(x)\Psi = 0, \qquad Z_\mu(x)\Psi = 0 \tag{57.6}$$

におきかえられる．ところで条件 (57.6) が互いに両立しうるためには Y と Z の交換関係が

$$[\mathrm{Y}_\mu(\vec{x}, x^0), Z_\nu(\vec{x}', x^0)]_- \overset{d}{\equiv} (Y_\mu \cdot Z_\nu - Z_\nu \cdot Y_\mu) = 0 \tag{57.7}$$

でなければならない．あるいは，もう少し弱い条件として，上の交換関係を計算したときに

$$[Y_\mu, Z_\nu]_- = W_{\mu\nu} \neq 0$$

となったとする．この $W_{\mu\nu}$ が (57.6) を使うと

$$W_{\mu\nu}\Psi = 0 \qquad (57.7)'$$

を満足してもよい．

以上のような量子論的要求 (57.7) または (57.7)′ は，もとの古典論では Poisson 括弧について

$$[Y_\mu, Z_\nu] \approx 0$$

を要求することと同じである．しかしこれは (57.5) のために成立しない．つまり (57.5) があるかぎり，このままでは量子化は無理である．

ここで束縛条件のでてきたそもそもの原因をふりかえってみよう．たとえば $Y_\mu = 0$ とおくことができなかったのは，一般に場の量 g_{ik}，p^{ik} に対して

$$[Y_\mu, g_{ik}] \neq 0 \qquad [Y_\mu, p^{ik}] \neq 0$$

となるからである．そこで，もしも g_{ik} や p^{ik} から適当な方法で，ある量 $\varphi_\alpha(x)$ を作りだし，それに対しては

$$[Z_\mu, \varphi_\alpha] = 0 \qquad [Y_\mu, \varphi_\alpha] = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \qquad (57.8)$$

が成立するようにできたとする．また場の方程式からは，それを適当に変形することによって，φ_α 以外の量は消去されてしまったとする．もしこのようなつごうのよいことが実際にできたならば，物理量 φ_α を取扱うかぎりでは，Z も Y も $=0$ としてさしつかえない．それゆえ，量子化する場合には (57.6) は不必要となる．

ところで 8 個の量 Z_μ，Y_μ $(\mu = 0, 1, \cdots, 3)$ のどれに対しても (57.8) が成立するという条件のために，12 個の物理量 g_{ik}，p^{ik} から作られる φ_α は $12 - 8 = 4$ 個の量となる．つまり他の 8 個の量が残っていると，これらと Y，Z との Poisson 括弧は 0 にならないから，これらの量は力学変数の仲間から除外するわけである．線型近似を例にとれば，このような φ_α とは，p_{ik}^T および h_{ik}^T のことである．しかし近似を使わない理論では，一般に φ_α を選びだすことは非常にむずかしい．

そこで，具体的に φ_α を選びだすかわりに，Poisson 括弧の定義を変更して

$$[Z_\mu, g_{ik}] = 0, \quad [Y_\mu, g_{ik}] = 0, \quad \left(\begin{array}{l} g_{ik} \text{ のかわりに } p^{ik} \text{ として} \\ \text{も同様の関係が成立する} \end{array}\right)$$

が成り立つようにしよう．いままでは Poisson 括弧の計算をしたあとでないと $Z_\mu \approx 0$，$Y_\mu \approx 0$ の条件を使ってはならなかった．しかし上のように新らしい Poisson 括弧が定義できれば，もはやはじめから $Z = Y = 0$ としてもかまわないことになる．

§ 58. Poisson 括弧の定義の変更

前 § 57 の考えにしたがって Poisson 括弧の定義を変更しよう．簡単のために質点系

の力学を考える．その一般座標を $q_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ またこれに正準共役な量を $p_i(t)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ とする．ここで (57.1), (57.2) に相当する束縛条件を

$$Y_\mu(q_1\cdots, q_N, p_1\cdots, p_N)\approx 0 \quad (\mu=1, 2, \cdots, M<N) \tag{58.1}$$

とする．重力場の場合にならって Y 同士の間の Poisson 括弧は

$$[Y_\mu, Y_\nu]\approx 0 \quad (\mu, \nu=1, 2, \cdots, M) \tag{58.2}$$

とする．いまこれに新らしくYと同じ個数，すなわちM個の条件

$$Z_\mu(q_1\cdots; p_1\cdots)\approx 0 \quad (\mu=1, 2, \cdots, M) \tag{58.3}$$

をつけたとする．これは重力場の例では座標条件に相当するものである．したがってどの Z_ν に対しても

$$[Y_\mu, Z_\nu]\not\approx 0$$

となる Y_ν は必ず1つはあるとする．Z_μ 同士については (58.2) のような条件は要求しないことにする．ここで簡単のために

$$Z_\nu \stackrel{d}{\equiv} Y_{M+\nu}$$

とかくことにして，束縛条件としては (58.1), (58.3) を一緒にして

$$Y_\mu\approx 0 \quad (\mu=1, 2, \cdots, 2M) \tag{58.3$'$}$$

とする．

ここで議論を簡単にするために正準変換

$$(q_i, p_i)\to(Q_i, P_i) \quad (i=1, 2, \cdots, N)$$

を考えよう．とくに $P_1\cdots P_M$ については

$$P_\mu \stackrel{d}{\equiv} Y_\mu(q_1\cdots, p_1\cdots) \quad (\mu=1, 2, \cdots, M)$$

となるように新らしい変数 (P, Q) を選ぶことにする．このようにできるのは，仮定 (58.2) のためである．そこで新らしい変数を使ったときの束縛条件 (58.3)$'$ は

$$P_\mu\approx 0, \quad Y_{M+\mu}\stackrel{d}{\equiv} Z_\mu \stackrel{d}{\equiv} F_\mu(Q_1\cdots Q_N, P_{M+1}\cdots P_N)\approx 0 \tag{58.4}$$
$$(\mu=1, 2, \cdots, M)$$

となる．この F_μ のなかには　$P_1\cdots P_M$　が入っていてもよいが，束縛条件 $P_\mu\approx 0$ $(\mu=1,\cdots,M)$のために，はじめから0としておいてもかまわない．

さて上に述べた Y_μ と Z_μ との関係から，どの Z_μ も必ず $Q_1,\cdots,Q_M$ のどれかを含んでいるはずである．また $Q_1,\cdots,Q_M$ の中のどれも必ず，少くともどれか1つの Z_μ の中に含まれているはずである．なんとなれば，いま仮りに Q_1 がどの Z にも含まれていなかったとする．そこで適当な $M-1$ 個の $Z_\mu=0$ (たとえば $\mu=1, 2, \cdots, M-1$) を

$Q_2, \cdots, Q_M$ について解いて，これらの Q を Q_s, P_s $(s=M+1, \cdots, N)$ の関数として書き表らわしたとする．これを残った Z_M に代入すると，Z_M はもはや $Q_1, \cdots, Q_M$ には無関係となる．したがってすべての P_μ $(\mu=1, \cdots, M)$ と Z_M との間の Poisson 括弧は 0 となる．このようなことが起らないためには $Q_1, \cdots, Q_M$ はどれも必ず 1 回は Z の中にでてこなければならない．また当然のことであるが，M 個の F_μ は $Q_1, \cdots, Q_M$ の関数として互に関数的に独立であるものとする．したがって，$\partial F_\mu/\partial Q_\nu$ $(\mu, \nu=1, 2, \cdots, M)$ を (μ, ν) 要素とする M 次元の関数行列式は 0 でない．また $Z_\mu=0$ $(\mu=1, 2, \cdots, M)$ を解いて $Q_1, \cdots, Q_M$ を Q_s, P_s $(s=M+1, \cdots, N)$ の関数として表わすことができるはずである．したがって，(58.4) から

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF_\mu}{dQ_s}&=\frac{\partial F_\mu}{\partial Q_s}+\sum_{\nu=1}^{M}\frac{\partial F_\mu}{\partial Q_\nu}\frac{\partial Q_\nu}{\partial Q_s}\approx 0\\ \frac{dF_\mu}{dP_s}&=\frac{\partial F_\mu}{\partial P_s}+\sum_{\nu=1}^{M}\frac{\partial F_\mu}{\partial Q_\nu}\frac{\partial Q_\nu}{\partial P_s}\approx 0\end{aligned}\right.\quad\begin{pmatrix}\mu=1, \cdots, M\\ s=M+1, \cdots, N\end{pmatrix}$$

いま，関数行列 $\partial F_\mu/\partial Q_\nu$ の逆マトリックスを $F^{-1}_{\mu\nu}$ とする．すなわち

$$\sum_{\nu=1}^{M}\frac{\partial F_\mu}{\partial Q_\nu}F^{-1}_{\nu\rho}=\sum_{\nu=1}^{M}F^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial Q_\rho}=\delta_{\mu\rho}\quad(\mu, \rho=1, 2, \cdots, M)$$

とする．そうなれば上の ≈ 0 から

$$\frac{\partial Q_\mu}{\partial Q_s}\approx-\sum_{\nu=1}^{M}F^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial Q_s},\qquad \frac{\partial Q_\mu}{\partial P_s}\approx-\sum_{\nu=1}^{M}F^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial P_s}\qquad\begin{pmatrix}s=M+1, \cdots, N\\ \mu=1, \cdots, M.\end{pmatrix}\tag{58.5}$$

さて，正準変数 $(p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_N)$ の 2 つの任意の関数を

$$A(p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_N),\ B(p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_N)$$

とする．これを新らしい変数で書いたものを

$$A'(P_1, \cdots, P_N, Q_1, \cdots, Q_N),\ B'(P_1, \cdots, P_N, Q_1, \cdots, Q_N)$$

とおく．ここで新らしい Poisson 括弧を定義するにあたり，独立な力学変数は $2(N-M)$ 個の (P_s, Q_s) $(s=M+1, \cdots, N)$ であるとする．A', B' の中にある $P_1, \cdots, P_M$ は一応単なるパラメーターとみなして，力学変数の仲間から除外する．また $Q_1, \cdots, Q_M$ は (58.4) の $\approx$ を $=$ におきかえた関係式によって間接的にあたえられた関数

$$Q_\mu=Q_\mu\{P_{M+1}, \cdots, P_N, Q_{M+1}, \cdots, Q_N\}\quad(\mu=1, 2, \cdots, M)$$

と考える．このように考えなおしたときの A', B' の Poisson 括弧を特にいままでの Poisson 括弧と区別して $[A', B']^*$ で示す．すなわち

$$[A', B']^* \overset{d}{\equiv} \sum_{s=M+1}^{N}\left(\frac{\partial A'}{\partial Q_s} + \sum_{\mu=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_\mu}\frac{\partial Q_\mu}{\partial Q_s}\right)\left(\frac{\partial B'}{\partial P_s} + \sum_{\nu=1}^{M}\frac{\partial B'}{\partial Q_\nu}\cdot\frac{\partial Q_\nu}{\partial P_s}\right)$$
$$-\sum(A' \text{ と } B' \text{ といれかえた項}) \tag{58.6}$$

(58.5) の $\approx$ を $=$ にすりかえた関係式を (58.6) に代入して書きなおすと

$$= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial A'}{\partial Q_i}\frac{\partial B'}{\partial P_i} - \sum_{\mu=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_\mu}\frac{\partial B'}{\partial P_\mu} - \sum_{s=M+1}^{N}\sum_{\mu,\nu=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_s}\frac{\partial B'}{\partial Q_\mu}F^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial P_s}$$
$$- \sum_{s=M+1}^{N}\sum_{\mu,\nu=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_\mu}F^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial Q_s}\cdot\frac{\partial B'}{\partial P_s} + \sum_{s=M+1}^{N}\sum_{\mu,\nu=1}^{M}\sum_{\rho,\sigma=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_\mu}F^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial Q_s}$$
$$\times\frac{\partial B'}{\partial Q_\rho}F^{-1}_{\rho\sigma}\frac{\partial F_\sigma}{\partial P_s} \quad -\left[\text{上の各項の } A' \text{ と } B' \text{ といれかえたもの}\right] \tag{58.7}$$

この右辺の第1項は，それの A', B' を入れかえたものと一緒にすれば，普通の Poisson 括弧である．またあとの複雑な項は適当にまとめると結局つぎのようになる．

$$[A', B']^* = [A', B'] - \sum_{\mu,\nu=1}^{2M}[A', Y_\mu]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu, B'] \tag{58.8}$$

(58.8) の右辺の [ ] は普通の Poisson 括弧を示す．すなわち $2N$ 個の変数 (P_i, Q_i) $(i=1,\cdots,N)$ がすべて独立としたときの括弧である．また $Y^{-1}_{\mu\nu}$ とはつぎのような $2M$ 次元の正方マトリックスである．すなわち，それを説明するまえにまず，$2M$ 次元の正方マトリックス

$$\left([Y_\mu, Y_\nu]\right) \overset{d}{\equiv} \begin{pmatrix} [Y_1, Y_1] & [Y_1, Y_2] & \cdots & [Y_1, Y_{2M}] \\ [Y_2, Y_1] & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ [Y_{2M}, Y_1] & \cdots & & [Y_{2M}, Y_{2M}] \end{pmatrix}$$

を考える．これに Y_μ の定義を使うと，

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} & & & & -\partial F_1/\partial Q_1 & -\partial F_2/\partial Q_1 & \cdots & -\partial F_M/\partial Q_1 \\ & 0_M & & & -\partial F_1/\partial Q_2 & \cdots & & \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & & -\partial F_1/\partial Q_M & \cdots & & -\partial F_M/\partial Q_M \\ \hdashline \partial F_1/\partial Q_1 & \partial F_1/\partial Q_2 & \cdots & \partial F_1/\partial Q_M & [F_1, F_1] & [F_1, F_2] & \cdots & [F_1, F_M] \\ \partial F_2/\partial Q_1 & \cdots & & & [F_2, F_1] & \cdots & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ \partial F_M/\partial Q_1 & \cdots & & \partial F_M/\partial Q_M & [F_M, F_1] & \cdots & & [F_M, F_M] \end{array}\right)$$

となる．0_M とは M 次元の0マトリックスである．この逆マトリックスが $Y^{-1}_{\mu\nu}$ である．すなわち具体的に書くと，

$$(Y^{-1}) \overset{d}{\equiv} \left(\begin{array}{c|c} Y^{-1}_{\mu\nu} & Y^{-1}_{\mu,M+\nu} \\ \hline Y^{-1}_{M+\mu,\nu} & Y^{-1}_{M+\mu,M+\nu} \end{array}\right) \overset{d}{\equiv} \left(\begin{array}{c|c} \sum_{\lambda\tau=1}^{M} F^{-1}_{\mu\lambda}[F_\lambda, F_\tau]\cdot F^{-1}_{\nu\tau} & F^{-1}_{\mu\nu} \\ \hline -(F^{-1})^T_{\mu\nu} & 0_M \end{array}\right) \tag{58.9}$$

のように M 次元の部分マトリックスにわかれる．この右辺では 4 個の M 次元マトリックスのそれぞれの (μ,ν) ーマトリックス要素 $(\mu, \nu=1, 2, \cdots, M)$ を示してある．また $(F^{-1})^T_{\mu\nu}=(F^{-1})_{\nu\mu}$ のことである．

(58.9) を (58.8) の右辺に代入すると， たしかに (58.7) の右辺に等しいことが証明できる．たとえば (58.8) の右辺の最後の項を 4 つにわけて

$$-\sum_{\mu\nu=1}^{M}\Big\{[A', Y_\mu]Y^{-1}_{\mu\nu}[Y_\nu, B'] + [A', Y_\mu]\,Y^{-1}_{\mu,M+\nu}[Y_{M+\nu}, B']$$

$$+ [A', Y_{M+\mu}]Y^{-1}_{M+\mu,\nu}[Y_\nu, B'] + [A', Y_{M+\mu}]\,Y^{-1}_{M+\mu,M+\nu}[Y_{M+\nu}, B']\Big\} \tag{58.8)$'$ (}$$

この最後の項は (58.9) からわかるように 0 となる．めんどうな第 1 項は

$$-\sum_{\lambda,\tau,\mu,\nu=1}^{M} \frac{\partial A'}{\partial Q_\mu}\cdot F^{-1}_{\mu\lambda}[F_\lambda, F_\tau]F^{-1}_{\nu\tau}\cdot\left(-\frac{\partial B'}{\partial Q_\nu}\right)$$

ここで F_λ は $P_1, \cdots, P_M$ に無関係であることに注意すると，

$$[F_\lambda, F_\tau] = \sum_{s=M+1}^{N}\left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial Q_s}\cdot\frac{\partial F_\tau}{\partial P_s} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial P_s}\frac{\partial F_\tau}{\partial Q_s}\right)$$

となる．これを上に代入して

$$+\sum_{\mu,\nu=1}^{M}\sum_{\lambda,\tau=1}^{M}\sum_{s=M+1}^{N} \frac{\partial A'}{\partial Q_\mu}\frac{\partial B'}{\partial Q_\nu} F^{-1}_{\mu\lambda}\cdot F^{-1}_{\nu\tau}\cdot\left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial Q_s}\frac{\partial F_\tau}{\partial P_s} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial P_s}\frac{\partial F_\tau}{\partial Q_s}\right)$$

これは (58.7) の最後の項とそれの A', B' を入れかえた項を一緒にしたものにほかならない．(58.8)′ の他の項についても (58.7) と一致することが容易にわかる．

ここでもとの正準変数 $(p_i, q_i)(i=1, \cdots, N)$ にもどしても，Poisson 括弧の [ ] の値は変らないから，結局

$$[A, B]^* = [A, B] - \sum_{\mu,\nu=1}^{2M}[A, Y_\mu]Y^{-1}_{\mu\nu}[Y_\nu, B] \tag{58.8)$''$ (}$$

となる．この式では各 Y_μ はもとの $(p_i\, q_i)$ の関数に書きなおしてあるものとする．

上にあたえた Poisson 括弧の新らしい定義は Dirac があたえたものであるから，**Dirac 括弧**と呼ぶことにする[†]． この [ ]* は Poisson 括弧の満足すべき性質をすべて満た

[†] P. A. M. Dirac : Phys. Rev. **114** (1959) p. 924

していることがわかる.（付録 § **A.5** 参照）

(58.8)″で A として束縛条件の 1 つ Y_ρ（$\rho=1, 2, \cdots, 2M$）をとれば，任意の B に対して

$$[Y_\rho, B]^* = 0$$

となることが容易にわかる．また B として Hamiltonian H を用いれば，運動方程式

$$\partial_0 Y_\rho = [Y_\rho, H]^* = 0$$

すなわち，$Y_\rho=0$ は時間がたってもそのまま成立するこになる.

また A，B がともに座標変換に対して不変な量，すなわち

$$[A, Y_\mu] = 0, \qquad [B, Y_\mu] = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, M)$$

のときは，(58.9) をみればわかるように

$$[A, B]^* = [A, B]$$

となることもすぐにわかる.

さて，ここで Dirac 括弧を 2 つの例に適用してみよう．まず電磁場の理論を考えよう. Lagrange 関数は

$$\mathfrak{L} \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \tag{58.10}$$

ここで

$$f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

A_μ は 4 元ポテンシャルである．ここでは簡単のために特殊相対論の範囲での電磁場の理論を考える.

さて，A_μ に正準共役な量を p^μ と書けば

$$p^k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{k,0}} = f^{k0} = \partial_0 A_k - \partial_k A_0$$

ところが p_0 に対しては上のような関係は使えない．というのは

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{0,0}} = 0$$

となるからである．Poisson 括弧は

$$[A_\mu(\vec{x}, x^0), p^\nu(\vec{x}', x^0)] = \delta^\nu_\mu \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{58.11}$$

Hamiltonian 密度 $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H} = p^0 \cdot u + \frac{1}{2} p^k \cdot p^k + \frac{1}{4} f_{kl} f_{kl} + p^k \partial_k A_0$$

あるいは書きなおして

$$\mathscr{H}=p^0u+\frac{1}{2}p^kp^k+\frac{1}{4}f_{kl}f_{kl}-A_0\partial_kp^k+\partial_k(p^kA_0) \tag{58.12}$$

この最後の項は運動方程式をだすのには，役だたないからはぶく．第1項の u は不定関数である．

場の正準型の方程式は，場の量を一般的に Φ と書くと

$$\partial_0\Phi=[\Phi,H], \qquad H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}d^3x$$

となる．とくにこれが Lagrange 形式でかいた電磁場の方程式と一致するためには，

$$\partial_0p^0=[p^0\cdot H]=\partial_kp^k\approx 0 \tag{58.13}$$

および

$$p^0\approx 0 \tag{58.14}$$

という条件が必要である．(58.14) は重力場の場合の (53.13)′，すなわち

$$p^k\approx 0 \qquad p^0\approx 0$$

に相当する．一方，(58.13) は (57.1)，(57,2) に相当するものである．電磁場の A_0 は重力場の λ, λ_k と同じように，ほんとうの力学変数ではなくて，いわば Lagrange の未定係数に相当するものである．

さて，本節の記法にしたがえば (58.13) は

$$Y\overset{d}{\equiv}Y_1\overset{d}{\equiv}\partial_kp^k\approx 0 \tag{58.13$'$}$$

となる．そこでこのほかに座標条件に対応する新らしい条件 $Z\overset{d}{\equiv}Y_2\approx 0$ を付け加えなければならない．Z としては

$$[Z,Y]\not\approx 0 \tag{58.15}$$

ならどのようなものでもよい．

ここで束縛条件の意味を明らかにさせるために，§ 54 にならってゲージ変換

$$A_\mu\to A_\mu{}'=A_\mu+\delta A_\mu \quad \delta A_\mu=\partial_\mu\xi(x) \tag{58.16}$$

を考える．$\xi(x)$ は x の任意のスカラー関数で，無限小量とする．これに対して作用積分が不変であるから，(54.5) に相当して，ゲージ変換の母関数は

$$G\overset{d}{\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{\mu,0}}\delta A_\mu d^3x=\int_{-\infty}^{\infty}p^\mu\cdot\partial_\mu\xi d^3x$$

あるいは部分積分して

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}\{p^0\cdot\partial_0\xi-\xi\partial_kp^k\}d^3x$$

となる．ゲージ不変な量に対しては，たとえば f_{kl} は

$$\delta f_{kl}=[f_{kl},G]=0$$

となる.

上に考えた条件 Z が (58.15) を満足するとすれば，これはゲージ不変でない条件ということになる. すなわちゲージを特別にきめてしまうことに相当する.

いま

$$Z\overset{d}{\equiv}Y_2\overset{d}{\equiv}\partial_k A_k\approx 0 \qquad (58.17)$$

とおく. そうすると本論にしたがって

$$\Big([Y_\mu(x),Y_\nu(x')]\Big)\overset{d}{\equiv}\begin{pmatrix}0 & \varDelta\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\ -\varDelta\delta(\vec{x}-\vec{x}') & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[Y_1,Y_1] & [Y_1,Y_2]\\ [Y_2,Y_1] & [Y_2,Y_2]\end{pmatrix}$$

それゆえ，これの逆マトリックスは

$$\Big(Y_{\nu\lambda}(x',x'')^{-1}\Big)\overset{d}{\equiv}\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\varDelta'}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\\ \dfrac{1}{\varDelta'}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'') & 0\end{pmatrix} \qquad (58.18)$$

となる.

そこで Dirac 括弧は

$$[A,B]^*=[A,B]+\int[A,Y_1(x')]\,\frac{1}{\varDelta'}\,[Y_2(x'),B]d^3x'$$
$$-\int[A,Y_2(x')]\,\frac{1}{\varDelta'}\,[Y_1(x'),B]d^3x'$$

特に

$$[A_i(\vec{x}),p^k(\vec{y})]^*=\delta_i^k\delta(\vec{x}-\vec{y})+\int[A_i(\vec{x}),\partial_{l'}p^l(\vec{x}')]\frac{1}{\varDelta'}[\partial_{m'}A_m(\vec{x}'),p^k(\vec{y})]d^3x'$$
$$=\left(\delta_i^k-\frac{\partial_i\partial_k}{\varDelta}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (58.19)$$

となる. この両辺にたとえば $\partial/\partial x^i$ をかければ，右辺はたしかに0となる. したがって条件 $Z\approx 0$ を

$$Z=\partial_i A_i(x)=0$$

と考えてかまわない. 同様のことは $\partial_k p^k=0$ についてもいえる.

そこで Hamiltonian を部分積分して少し変形しておいて，それに以上の結果を使うと

$$H=\int\frac{1}{2}(p^{kT}p^{kT}+\partial_k A_l{}^T\partial_k A_l{}^T)d^3x$$

となる. ここで A_k も p_k も横波の性質を満足しているから，それぞれを $A_k{}^T, p^{kT}$ と

かきかえた．また (58.12) の A_0 に比例する項は消失したから，A_0 に共役な $p^0(\approx 0)$ も束縛条件を使って消してしまった．

次に線型近似を用いた重力場の理論に Dirac 括弧を適用してみよう．

この場合には，もともとある束縛条件は

$$h_{ik,ik}-\Delta h_{ii}\approx 0 \qquad \text{および} \qquad \partial_k p_{ki}\approx 0$$

である．そこで新らしく付け加える座標条件として，不定関数 $p^{(1)}, h_i$ を 0 に等しいとおく．すなわち

$$p^{(1)}\overset{d}{\equiv}\frac{3}{2\Delta\Delta}p_{kl,kl}-\frac{1}{2\Delta}p_{kk}\approx 0$$

$$h_i\overset{d}{\equiv}-\frac{1}{4\Delta\Delta}h_{mn,mni}+\frac{1}{4\Delta}(4h_{ik,k}-h_{mm,i})\approx 0$$

これら 4 種類の条件を組み合わせると結局

$$Y_0\overset{d}{\equiv}h_{ii}\approx 0 \qquad Y_k\overset{d}{\equiv}h_{ki,i}\approx 0$$

$$Z_0\overset{d}{\equiv}p_{ii}\approx 0 \qquad Z_k\overset{d}{\equiv}p_{ki,i}\approx 0 \tag{58.20}$$

とすればよい．(58.20) のように束縛条件をくみかえると，$(Y_{\mu\nu})$ に相当するマトリックスの形が簡単になるから，好都合である．すなわち 8 行 8 列のマトリックスは

$$\left(\begin{array}{c|c}[Y_\mu, Y_\nu] & [Y_\mu, Z_\nu]\\ \hline [Z_\mu, Y_\nu] & [Z_\mu, Z_\nu]\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}0_4 & [Y_\mu(\vec{x}), Z_\nu(\vec{x}')]\\ \hline [Z_\mu(\vec{x}), Y_\nu(\vec{x}')] & 0_4\end{array}\right)$$

となる．

上のマトリックスの 0 でない 4 行 4 列の部分マトリックスを具体的に書けば

$$\Big([Y_\mu(\vec{x}), Z_\nu(\vec{x}')]\Big)=\left(\begin{array}{c|c}3\delta(\vec{x}-\vec{x}') & -\partial_k(\vec{x}-\vec{x}')\\ \hline \partial_i\delta(\vec{x}-\vec{x}') & -\dfrac{1}{2}(\delta_{ik}\Delta+\partial_i\partial_k)\delta(\vec{x}-\vec{x}')\end{array}\right)$$

となる．そこで逆マトリックスは

$$\left(\begin{array}{c|c}0_4 & (Y_\mu, Z_\nu)^{-1}\\ \hline (Z_\mu, Y_\nu)^{-1} & 0_4\end{array}\right)$$

となる．ここで 4 行 4 列の部分マトリックス $(Z_\mu Y_\nu)^{-1}$ は次のようなものである．

$$(Z_\mu(\vec{x}), Y_\nu(\vec{x}')^{-1} \overset{d}{\equiv} \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{1}{2}\delta(\vec{x}-\vec{x}') & -\dfrac{1}{2\Delta}\partial_l\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ \hline \dfrac{1}{2\Delta}\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{x}') & \left(\dfrac{\partial_k\partial_l}{2\Delta\Delta}-2\dfrac{\delta_{kl}}{\Delta}\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{array}\right) \qquad (58.21)$$

また $(Y_\mu, Z_\nu)^{-1}$ は (58.21) の符号を逆にしたものである.

そこで本論にしたがって $[h_{ik}, p_{ab}]^*$ を求めてみよう.

$$[h_{ik}(\vec{x}), p_{ab}(\vec{y})]^* = [h_{ik}(\vec{x}), p_{ab}(\vec{y})]$$

$$-\iint\sum_{\mu,\nu=0}^{3}[h_{ik}(\vec{x}), Z_\mu(\vec{x}')]\cdot(Z_\mu(\vec{x}'), Y_\nu(\vec{x}''))^{-1}\cdot[Y_\nu(\vec{x}''), p_{ab}(\vec{y})]d^3x'd^3x''$$

$$-\iint\sum_{\mu\nu=0}^{3}[h_{ik}(\vec{x}), Y_\mu(\vec{x}')]\cdot(Y_\mu(\vec{x}'), Z_\nu(\vec{x}''))^{-1}\cdot[Z_\nu(\vec{x}''), p_{ab}(\vec{y})]d^3x'd^3x''$$

この最後の項は計算するまでもなく 0 である. 右辺第 2 項に (58.21) を代入すると,

$$[h_{ik}(\vec{x}), p_{ab}(\vec{y})]^* = \frac{1}{2}[(\delta_{ia}\delta_{kb}+\delta_{ib}\delta_{ka}-\delta_{ik}\delta_{ab})$$

$$+\frac{1}{\Delta}(\delta_{ik}\partial_a\partial_b+\delta_{ab}\partial_i\partial_k-\delta_{ia}\partial_k\partial_b-\delta_{kb}\partial_i\partial_a-\delta_{ib}\partial_k\partial_a-\delta_{ka}\partial_i\partial_b)$$

$$+\frac{1}{\Delta\Delta}\partial_i\partial_k\partial_a\partial_b]\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

となる. これは $h_{ik}^T(x)$, $p_{ab}^T(y)$ の間の普通の Poisson 括弧 (56.32) にほかならない. つまり Dirac 括弧では, h_{ik}, p_{ab} からめんどうな計算によって h_{ik}^T p_{ab}^T に移らなくとも, すなわちもとの h_{ik}, p_{ab} のままでも, Poisson 括弧が横波の条件を満足するようになっている. 上の両辺に ∂_i を作用させると, 右辺は 0 となる. 電磁場の例と同様に, この場合にも $Z\approx 0$, $Y\approx 0$ を $=0$ におきかえてよいことが, たしかにわかる.

要するに Dirac 括弧のすぐれた点は, 条件式 Y_μ を具体的に解いて M 組の正準変数を消去しないでも, 結果的には新 Poisson 括弧は, 変数を消去したものと同等になるという点である. しかし実際の複雑な問題では, $Y_{\nu\mu}^{-1}$ を求めることが大問題である. これはもとの束縛条件を解くのと同程度にむずかしい.

§59. 座標条件の実例

さて, 近似を使わない場合の正準型重力理論について具体的に座標条件を考えよう. 前節の最後に述べた線型近似の場合をお手本として, まず

$$Z_0 \stackrel{d}{\equiv} g_{rs}p^{rs}(x) \stackrel{d}{\equiv} p(x) \approx 0 \qquad (59.1)$$

とおく．これと $\mathcal{H}_i$ との Poisson 括弧は ≈ 0 となる．これは直接計算しても証明できるが，次のようにすれば容易である．(54.8) であたえられる G_1 は $x^0=$一定 という面内での3次元座標変換

$$x^0 = \text{不変}, \quad x^k \to x^{k'} = x^k + \xi^k(x^0, x', \cdots x^3)$$

に対する母関数である．すなわちこの変換に対して，Z_0 は

$$\bar{\delta}Z_0 \stackrel{d}{\equiv} \delta Z_0 - \partial_k Z_0 \cdot \xi^k \approx [Z_0(x), G_1]$$

となる．ところで (52.8)′ から，

$$\delta p = -\xi^k{}_{,k}\cdot p, \quad \bar{\delta}p = -\partial_k(\xi^k \cdot p)$$

となるから，上の式は

$$-\partial_k\{\xi^k(x)\cdot Z_0(x)\} \approx \int \xi^k(x')[Z_0(x), \mathcal{H}_k(x')]d^3x'$$

$\xi^k(x)$ はまったく任意の関数であるから，両辺を比較して

$$\partial_{k'}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\cdot Z_0(x') \approx [Z_0(x), \mathcal{H}_k(x')]$$

となる．この左辺は条件 (59.1) 自身によって ≈ 0 となる．

さて $p(x)$ と $\mathcal{H}_n$ との Poisson 括弧は ≈ 0 とはならないから §58 の方法で Poisson 括弧を Dirac 括弧に変更してもよいが，計算がとてもめんどうであるから，むしろ直接に，この2つの条件を使って1組の正準変数を消去することにする．

まず p に共役な量をさがすために次の Poisson 括弧をしらべてみる．すなわち

$$[g_{rs}(x), p(x')] = [g_{rs}(x), p^{ik}(x')]g_{ik}(x') = g_{rs}(x')\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

また

$$\left[\frac{1}{g_{rs}(x)}, p(x')\right] = -\frac{1}{(g_{rs}(x))^2}[g_{rs}(x), p(x')] = -\frac{\delta(\vec{x}-\vec{x}')}{g_{rs}(x)}$$

一般に $g_{ik}(x)$ の n 次の同次式を $F_n(x)$ とすると

$$[F_n(x), p(x')] = n\cdot F_n(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (59.2)$$

となる．そこで特に $F_n(x)$ として

$$F_3 \stackrel{d}{\equiv} J(x) = det(g_{rs}(x))$$

をとれば，

$$[J(x), p(x')] = 3J(x)\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

これから

$$\left[\frac{1}{3}\log J(x), p(x')\right]=\frac{1}{3J(x)}[J(x), p(x')]$$
$$=\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

つまり

$$q(x)\overset{d}{\equiv}\log\left(\{J(x)\}^{1/3}\right) \tag{59.3}$$

とすると，

$$[q(\vec{x}), p(\vec{x}')]=\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{59.4}$$

となるから，$q(x)$ と $p(x)$ は正準共役の関係になっている．

またつぎのような量を考えよう．

$$\tilde{g}_{ik}(x)\overset{d}{\equiv}\{J(x)\}^{-1/3}\cdot g_{ik}(x)=e^{-q(x)}\cdot g_{ik}(x) \tag{59.5}$$

$$\tilde{e}^{ik}(x)\overset{d}{\equiv}\{J(x)\}^{1/3}e^{ik}(x)=e^{q(x)}\cdot e^{ik}(x) \tag{59.6}$$

この ～ 印のついた量はともに g_{ik} の 0 次同次式である．したがって (59.2) から，

$$[\tilde{e}^{ik}(x), p(x')]=0, \qquad [\tilde{g}_{ik}(x), p(x')]=0 \tag{59.7}$$

となる．ここで次の関係式は容易にわかる．

$$\tilde{e}^{ik}\cdot\tilde{g}_{kl}=e^{ik}g_{kl}=\delta^i_l$$

つぎに $p^{ab}(x)$ との Poisson 括弧をしらべてみる．

$$[p^{ab}(x), p(x')]=-p^{ab}(x)\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

そこで

$$[J(x)^{1/3}\cdot p^{ab}(x), p(x')]=0$$

したがって

$$\tilde{p}^{ab}(x)\overset{d}{\equiv}(J(x))^{1/3}\cdot\left\{p^{ab}(x)-\frac{1}{3}e^{ab}(x)p(x)\right\} \tag{59.8}$$

とおけば

$$[\tilde{p}^{ab}(x), p(x')]=0$$

また

$$\tilde{p}_{ab}(x)\overset{d}{\equiv}\tilde{g}_{ai}\tilde{g}_{bk}\tilde{p}^{ik} \tag{59.8$'$}$$

とおくと

$$[\tilde{p}_{ab}(x), p(x')]=0$$

さらにこの $\tilde{p}_{ab}$, $\tilde{p}^{ab}$ については

$$[\tilde{p}_{ab}(x), J(x')]=[\tilde{p}^{ab}(x), J(x')]=0$$

が成り立つ. したがって

$$[\tilde{p}_{ab}, q] = [\tilde{p}^{ab}, q] = 0 \tag{59.9}$$

また (59.8) の定義から,

$$\tilde{p} \overset{d}{\equiv} \tilde{p}^{ab} \cdot g_{ab} = 0 \tag{59.10}$$

である.

以上で 12 個の力学変数 p^{ik}, g_{ik} は 2 組に分かれた. すなわち第 1 組は $p(x)$ と $q(x)$, 第 2 組は 10 個の変数

$$\tilde{p}^{ab}, \qquad \tilde{g}_{ab}$$

である. これらの両組から任意にそれぞれ 1 個ずつ場の量をとりだして, それらの Poisson 括弧を求めれば, 必ず 0 となる. この意味でこれら 2 組は互いに独立といえる.

さてこれから, Hamiltonian やその他の数式にでてくる $p(x)$ はすべて 0 とおくことにする. 同時に束縛条件 $\mathscr{H}_n \approx 0$ を $=0$ におきかえ, これによって $q(x)$ を $\tilde{p}^{ab}$, $\tilde{g}_{ab}$ の関数としてあらわす. このようにして, 理論全体から 1 組の正準変数 p, q を完全に消去してしまおう.

まず $\mathscr{H}_n = 0$ を $q(x)$ について解くために $\mathscr{H}_n$ を書きなおしてみる. $p=0$ を代入すると (57.2) は

$$-\partial_i\left[e^{\frac{q}{2}}\{2\tilde{e}^{ik}\partial_k q + \partial_k \tilde{e}^{ik}\}\right]$$
$$= 4\kappa^2 e^{-\frac{3}{2}q}\tilde{p}^{ik}\tilde{p}_{ik} + K \tag{59.11}$$

ここで K とは $\sqrt{J}\cdot{}^{(3)}R$ から 3 次元 div の部分を差しひいた残りである. すなわち

$$K \overset{d}{\equiv} \sqrt{J}\cdot e^{ik}\{\Gamma^l_{ik}\cdot\Gamma^m_{lm} - \Gamma^l_{im}\cdot\Gamma^m_{kl}\}$$

これを $\tilde{g}_{ik}, q$ を使って書くとつぎのようになる.

$$K = \frac{1}{4}e^{\frac{q}{2}}\tilde{e}^{ij}\tilde{e}^{kl}\tilde{e}^{mn}(\tilde{g}_{ik,m}\tilde{g}_{jl,n} - 2\tilde{g}_{ik,m}\tilde{g}_{jn,l})$$
$$+\frac{1}{2}e^{\frac{q}{2}}\{\tilde{e}^{lm}\tilde{e}^{ik}\tilde{g}_{mi,k}\partial_l q - \tilde{e}^{ik}\partial_i q\cdot\partial_k q\} \tag{59.12}$$

ここで $\det(\tilde{g}_{ik}) = 1$ を x^l で微分すると,

$$\tilde{e}^{ik}\tilde{g}_{ik,l} = 0$$

という関係がでてくる. これを使ったために K は上のように簡単になった.

さて (59.11) を使って, q を $\tilde{p}^{ab}$ や $\tilde{g}_{ik}$ の関数として表わすことはとても無理である. しかし座標系を適当にとっておけば, 重力場が弱いときには $J \sim 1$, したがって $q \sim 0$ となる. そこでこのようなときには, 逐次近似法で q を $\tilde{p}^{ab}$, $\tilde{g}_{ik}$ の関数として表

わすことができる．すなわち（59.11）の q の２階微分以外は　$\partial_k q=0$　$q=0$　とすると第０近似として

$$-2\tilde{e}^{ik}\partial_i\partial_k q-\partial_i\partial_k\tilde{e}^{ik}$$
$$=4\kappa^2\tilde{p}^{ik}\tilde{p}_{ik}+\frac{1}{4}\tilde{e}^{ij}\tilde{e}^{kl}\tilde{e}^{mn}(\tilde{g}_{ik,m}\tilde{g}_{jl,n}-2\,\tilde{g}_{ik,m}\tilde{g}_{jn,l})$$

これは計量テンソル $\tilde{e}^{ik}$ をもつ３次元空間の中の Laplace 型の方程式である．したがって，もし，$\tilde{p}^{ik}$, $\tilde{g}_{ik}$ がわかっているものとすれば，q は無限遠で０になるという条件のもとに，$\tilde{p}^{ik}$, $\tilde{g}_{ik}$ 等の関数として表らわされる．この解を（59.11）の中のいままで０とおいた q や $\partial_k q$ に代入して，再び q の２階微分方程式を解く．そして上と同様の手続きをくりかえせば，一応めんどうではあるが，q を $\tilde{g}_{ik}$, $\tilde{p}^{ab}$ の汎関数として表わすことができる．そこで p, q は理論から完全に消去され，力学変数は 10 個の $\tilde{p}^{ab}$, $\tilde{g}_{ik}$ となる．また束縛条件

$$p\approx 0,\qquad \mathcal{H}_n\approx 0$$

は不要となる．

さてこのようにしたときの Hamiltonian を求めてみよう．線型近似の場合を手本として，(53.7)′ を次のようにかく．

$$\mathcal{H}=-\mathcal{H}_n-(\lambda-1)\mathcal{H}_n-\lambda^i\cdot\mathcal{H}_i+p^k v_k+p^0\cdot w$$

この第１項の $\mathcal{H}_n$ の中にある ${}^{(3)}R$ から３次元 div の項を分離すると

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\text{main}}(\tilde{g}_{ik},\ \tilde{p}^{ik})-\lambda^i\cdot\mathcal{H}_i(\tilde{g}_{ik},\ \tilde{p}^{ik})+p^k\cdot v_k \tag{59.13}$$

となる．ここで $\mathcal{H}_{\text{main}}$ とは　$-\mathcal{H}_n$ の中の ${}^{(3)}R$ からくる３次元 div を除いた残りで

$$\mathcal{H}_{\text{main}}\overset{d}{\equiv}\frac{2\kappa}{\sqrt{J}}\tilde{p}^{mn}\tilde{p}_{mn}+\frac{1}{2\kappa}K \tag{59.14}$$

である．この式の K はすでに（59.12）にあたえられている．この（59.14）や（59.13）の $\mathcal{H}_i$ の中にある q はすべて，さきにのべたように $\tilde{g}_{ik}$, $\tilde{p}^{ik}$ の汎関数として書き表わされてあるものとする．なお（59.14）と　$-\mathcal{H}_n$ とのちがいは３次元 div

$$-\frac{1}{2\kappa}\partial_i\left\{\sqrt{J}\left(e^{ik}\Gamma^l_{kl}-\Gamma^i_{kl}e^{kl}\right)\right\}$$

であるが，これは運動方程式をだすのには，全然不要である．しかしこれがはぶかれたおかげで，(59.14) は恒等的に０とはならない．

また（59.13）ともとの Hamiltonian 密度 (53.7)′ を比べると，$(\lambda-1)\cdot\mathcal{H}_n$ と $p^0\cdot w$ とがおちている．$(\lambda-1)\cdot\mathcal{H}_n$ は関係式 $\mathcal{H}_n=0$ のためにはぶかれた．そのため変数 λ は，理論の中にもはやでてこないことになる．そこで λ に共役な p^0 についても，条件

$p^0 \approx 0$ を $p^0 = 0$ にすりかえてかまわない．したがって $p^0 \cdot w$ もはぶかれた．

ここで $\tilde{g}_{ik}$, $\tilde{p}^{rs}$ の Dirac 括弧をしらべてみよう．いま

$$Y_1 \overset{d}{\equiv} p(x), \qquad Y_2 \equiv \mathcal{H}_n(q, \tilde{p}^{ik}\tilde{g}_{ik})$$

とおくとき，Dirac 括弧の定義にしたがえば

$$[\tilde{g}_{ik}(\vec{x}), \tilde{p}^{rs}(\vec{y})]^* = [\tilde{g}_{ik}(\vec{x}), \tilde{p}^{rs}(\vec{y})]$$
$$-\iint \sum_{\mu,\nu=1}^{2} [\tilde{g}_{ik}(\vec{x}), Y_\mu(\vec{x}')] \cdot Y_{\mu\nu}^{-1}(\vec{x}, \vec{x}'') \cdot [Y_\nu(\vec{x}''), \tilde{p}^{rs}(\vec{y})] d^3x' \cdot d^3x''$$

となる．しかし

$$[\tilde{g}_{ik}, p] = [\tilde{p}^{rs}, p] = 0$$

を使うとつぎのようなる．

$$[\tilde{g}_{ik}, \tilde{p}^{rs}]^* = [\tilde{g}_{ik}(\vec{x}) \cdot \tilde{p}^{rs}(\vec{y})]$$
$$= \left\{\frac{1}{2}(\delta_i^r \delta_k^s + \delta_k^r \delta_i^s) - \frac{1}{3}\tilde{e}^{rs}(\vec{x})\tilde{g}_{ik}(\vec{x})\right\}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{59.15}$$

つぎに $\mathcal{H}_i$ を取り除くために，$x^0 =$ 一定という面 σ 上の座標系を固定する条件として

$$Z^i \overset{d}{\equiv} \partial_k \tilde{e}^{ki} \approx 0 \tag{59.16}$$

を考えよう．この Z^i は

$$[Z^i, p] = 0$$

となるから，(59.16) と

$$p = 0$$

とを同時に使用しても，矛盾をおこさない．

さて，(59.16) のおかげで

$$0 = \partial_k(\tilde{e}^{kl}\tilde{g}_{li}) \approx \tilde{e}^{kl}\tilde{g}_{li,k}$$

という関係がでてくる，そのために q を $\tilde{g}_{ik}, \tilde{p}^{ik}$ の関数として表わす関係式 (59.11) はさらに簡単になる．すなわち

$$-4\tilde{e}^{ik}\partial_i\partial_k(e^{\frac{q}{2}}) = 4\kappa^2 e^{-\frac{3}{2}q} \cdot \tilde{p}^{rs}\tilde{p}_{rs} + K \overset{d}{\equiv} 2\kappa \cdot \mathcal{H}_{\mathrm{main}} \tag{59.11$'$}$$

ここで (59.16) のおかげで

$$K = \frac{1}{4}e^{\frac{q}{2}}\tilde{g}_{ik,m}\tilde{g}_{jl,n}\tilde{e}^{ij}\{\tilde{e}^{kl}\tilde{e}^{mn} - 2\tilde{e}^{kn}\tilde{e}^{ml}\}$$
$$-2e^{-\frac{q}{2}}\tilde{e}^{ik}\partial_i(e^{\frac{q}{2}})\partial_k(e^{\frac{q}{2}}) \tag{59.12$'$}$$

さて q の定義式 (59.11)$'$ は，$\kappa = 8\pi G/c^4$ (いまは $c=1$ としてある) を使うと

$$\tilde{e}^{ik}\partial_i\partial_k\phi = 4\pi G\cdot\mathscr{H}_{\mathrm{main}} \qquad (59.11)''$$

となる．ここで

$$\phi = 1 - e^{q/2}$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ は Hamiltonian 密度の中で最も重要な項で，これは重力場のエネルギー密度である．また (59.11)″ の左辺は前にも述べたように，計量テンソル $\tilde{e}^{ik}$ をもつ3次元空間の中の Laplace 型方程式である．したがって ϕ は，重力場のエネルギーが作りだす Newton 型の重力ポテンシャルと考えられる．厳密にいえば $\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ の中にも ϕ（q を通して）が含まれているから，Newton ポテンシャルとは異なるが，近似的には Newton ポテンシャルと考えてかまわない．このように重力場自身のエネルギーが源となって再び重力場を作りだすことは，Einstein の場の方程式の非線型性によるものである．

以上述べたことは重力場があまり強くない時には，もっとはっきりする．$\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ は上に述べたように重力場の“質量密度”と考えられるから $\rho(\vec{x})$ と書くことにする．重力場が強くない場合には $\rho(\vec{x})$ の中の ϕ は0とおいてよい．そうすると (59.11)″ は近似的に

$$\tilde{e}^{ik}\partial_i\partial_k\phi \to \delta_{ik}\partial_i\partial_k\phi = \Delta\phi = 4\pi G\cdot\rho$$

となるから，この解は，

$$\phi(\vec{x}) = -G\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'$$

となる．この解を $\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ の中のKの最後の項に代入してみよう．この項は全 Hamiltonian H に次のような寄与をあたえる．

$$\frac{1}{2\kappa}\int(-2e^{-\frac{q}{2}})\cdot\tilde{e}^{ik}\partial_i(e^{\frac{q}{2}})\partial_k(e^{\frac{q}{2}})d^3x$$

$$\risingdotseq -\frac{1}{8\pi G}\int\partial_i\phi\cdot\partial_i\phi\,d^3x = \frac{1}{8\pi G}\int\phi\cdot\Delta\phi d^3x$$

$$= \frac{1}{2}\int\phi\cdot\rho d^3x = -\frac{G}{2}\int\int\frac{\rho(\vec{x})\cdot\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x\cdot d^3x'$$

これはまさに Newton の万有引力によるポテンシャルエネルギーにほかならない*)．この項が負であることは引力であることを示している．ただこの $\rho(\vec{x})$ は重力場自身のエネルギー密度であるということに注意すべきである．もし重力場と相互作用している物質があるときには，この ρ は重力場のエネルギー密度と物質のそれとの和になる．

上の式は近似式であるが，近似を使わないでも，一般の場合に K の最後の項が負になる

---

*)　上の式にある記号 $\risingdotseq$ は“近似的に等しい”ことを意味する．

こと，すなわち

$$-\frac{1}{\kappa}\int e^{-\frac{q}{2}}\tilde{e}^{ik}(x)\partial_i\phi\partial_k\phi d^3x < 0$$

は容易に証明できる．それには任意の 3 個の数 $a_i(i=1, 2, 3)$ に対して

$$\tilde{e}^{ik}a_ia_k > 0$$

という事実を使えばよい．この不等式は等価原理を利用して上の a_i の 2 次形式を局所的に Minkowski 形式になおしてみればすぐにわかる．

ついでに $\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ の他の項についても説明しておこう．$\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ の第 1 項すなわち $\tilde{p}^{rs}$ の 2 次形式の項は，(59.12)′ の K の第 1 項と一緒になって重力波のエネルギー密度を示す．この解釈は線型近似を考えるとよくわかる．その場合には，この節で考えた種々の量は下の → のようになる．

$$\sqrt{\kappa}\,\tilde{p}^{mn} \to \tilde{p}_{mn} \overset{d}{\equiv} \left(p_{mn} - \frac{1}{3}\delta_{mn}p_{ii}\right)$$

$$\tilde{g}_{ik} \to \delta_{ik} + \sqrt{\kappa}\,\tilde{h}_{ik} \overset{d}{\equiv} \delta_{ik} + \sqrt{\kappa}\left(h_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}h_{mm}\right)$$

$$J \to 1 + \sqrt{\kappa}\,h_{mm}$$

$$\tilde{e}^{ik} \to \delta_{ik} - \sqrt{\kappa}\,\tilde{h}_{ik}$$

$$q \to \frac{1}{3}\log(1 + \sqrt{\kappa}\,h_{mm}) \to \frac{\sqrt{\kappa}}{3}\cdot h_{mm}$$

$$p = 0 \to p_{ii} = 0$$

$$\partial_k\tilde{e}^{ik} = 0 \to \partial_k\tilde{h}_{ik} = 0$$

このようなおきかえをすると，q をきめる関係式 (59.11)′ は

$$\Delta q = 0, \quad \text{すなわち} \quad q = 0, \ h_{mm} = 0$$

となる．これを使うと $\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ は

$$\mathscr{H}_{\mathrm{main}} = 2\tilde{p}_{ik}\tilde{p}_{ik} + \frac{1}{8}(\tilde{h}_{ik,l}\tilde{h}_{ik,l} - 2\tilde{h}_{ik,l}\tilde{h}_{il,k})$$

この最後の項は書きなおすと 3 次元 div となるから，これをはぶくと

$$\mathscr{H}_{\mathrm{main}} = 2\tilde{p}_{ik}\tilde{p}_{ik} + \frac{1}{8}\tilde{h}_{ik,l}\tilde{h}_{ik,l} \tag{59.17}$$

この $\tilde{h}_{ik}$ および $\tilde{p}_{ik}$ は

$$\partial_k\tilde{p}_{ki} = 0, \qquad \tilde{p}_{ii} = 0, \qquad \tilde{h}_{ii} = 0, \qquad \tilde{h}_{ik,k} = 0$$

を満足する．したがって (59.17) は (56.31) と同じであることがわかる．

さてこれから Dirac 括弧を求めよう．一般論にしたがって，まず Y_i, Z^k の 6 個から

Poisson 括弧を求めると，つぎのような6行6列のマトリックスができる*).

$$\left(\begin{array}{c|c} [Y_i(x), Y_k(x')] & [Y_i(x), Z^r(x')] \\ \hline [Z^s(x), Y_k(x')] & [Z^s(x], Z^r(x')] \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} 0_3 & [Y_i(x), Z^r(x')] \\ \hline [Z^s(x), Y_k(x')] & 0_3 \end{array}\right) \tag{59.18}$$

ここで

$$[Z^r(x), Y_k(x')] = [\partial_s \tilde{e}^{sr}(x), 2\nabla_{l'} p^l{}_k(x')]$$

$$= -g_{kl}(x')\partial_{m'}\partial_s\left[J^{-\frac{1}{3}}(x)\cdot\left\{\tilde{e}^{rm}(x)\cdot\tilde{e}^{sl}(x)+\tilde{e}^{rl}(x)\cdot\tilde{e}^{sm}(x)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{3}\tilde{e}^{ml}(x)\cdot\tilde{e}^{rs}(x)\right\}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\right]-\Gamma_{ml,k}(x')\partial_s\left[\text{上と同じ}\right] \tag{59.19}$$

そこで (59.18) の逆マトリックスを

$$W \stackrel{d}{\equiv} \left(\begin{array}{c|c} 0_3 & W^k{}_t(x', x'') \\ \hline W_r{}^j(x', x'') & 0_3 \end{array}\right) \tag{59.20}$$

とおくと，これの3行3列の部分マトリックス $W_r{}^j$, $W^k{}_t$ はそれぞれ

$$\sum_{r=1}^{3}\int[Y_i(x), Z^r(x')]\cdot W_r{}^j(x', x'')d^3x' = \delta_i^j\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{59.21}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\int[Z^s(x), Y_k(x')]\cdot W^k{}_t(x', x'')d^3x' = \delta_t^s\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{59.21$'$}$$

を満足しなければならない.

(59.19) を (59.21)′ に代入すると，めんどうな計算ののちに (59.21)′ は

$$\tilde{e}^{mn}(x)\partial_m\partial_n W^s{}_t(x, x'') + \frac{1}{3}\tilde{e}^{sm}(x)\partial_m\partial_n W^n{}_t(x, x'')$$

$$= \delta_t^s\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{59.21$''$}$$

この方程式は $\tilde{e}^{mn}$ がわかっていれば解くことができる.

(59.21) についても同様に計算をすればよいが，つぎのような簡便法がある. (59.21) の両辺に $W^i{}_t(x, y)$ をかけて $\vec{x}$ について積分すると

$$-\sum_{r,i}\int d^3x'\int W_r{}^j(x', x'')[Z^r(x'), Y_i(x)]W^i{}_t(x, y)d^3x$$

---

*) $Y_i \stackrel{d}{\equiv} \mathcal{H}_i = 2\nabla_k p^k{}_i$, $Z^k \stackrel{d}{\equiv} \partial_i \tilde{e}^{ik}$　　$(i, k=1, 2, 3)$

$$= \int W^i{}_t(x, y)\delta^j_i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}'')d^3x$$

この左辺に (59.21)′ を適用すれば

$$-W_t{}^j(y, x'') = W^j{}_t(x'', y) \qquad (59.22)$$

となる．したがって (59.21)″ から $W^j{}_t(x, x')$ がわかれば $W_t{}^j(x', x)$ もわかる．

ここで再び線型近似の場合について (59.21)″ を調べてみよう．この時は $\tilde{e}^{rs} \to \delta_{rs}$ としてよいから (59.21)″ は

$$\varDelta W^s{}_t(x, x'') + \frac{1}{3}\partial_s\partial_n W^n{}_t(x, x'') = \delta^s_t \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \qquad (59.23)$$

そこで両辺に ∂_s をかけると

$$\frac{4}{3}\varDelta\partial_s W^s{}_t(x, x'') = \partial_t\delta(\vec{x} - \vec{x}'')$$

すなわち

$$\partial_s W^s{}_t(x, x'') = \frac{3}{4\varDelta} \cdot \partial_t\delta(\vec{x} - \vec{x}'') \qquad (59.23)'$$

(59.23)′ をもとの (59.23) に代入して

$$\varDelta W^s{}_t + \frac{1}{4\varDelta}\partial_s\partial_t\delta(\vec{x} - \vec{x}'') = \delta^s_t\delta(\vec{x} - \vec{x}'')$$

したがって

$$W^s{}_t(x, x'') = \left\{\frac{1}{\varDelta}\delta_{st} - \frac{1}{4\varDelta\varDelta}\partial_s\partial_t\right\}\delta(\vec{x} - \vec{x}'') \qquad (59.24)$$

したがって

$$W_t{}^s(x, x'') = -W^s{}_t(x'', x)$$
$$= -\left\{\frac{1}{\varDelta''}\delta_{st} - \frac{1}{4\varDelta''\varDelta''}\partial_s''\partial_t''\right\}\delta(\vec{x} - \vec{x}'')$$

そこでいま $\tilde{g}_{ik}$ と $\tilde{p}^{rs}$ の Dirac 括弧を計算してみよう．

$$[\tilde{g}_{ik}(x), \tilde{p}^{rs}(y)]^* = [\tilde{g}_{ik}(x), \tilde{p}^{rs}(y)]$$

$$-\sum_{l,m}\int[\tilde{g}_{ik}(x), Y_l(x')] \cdot W^l{}_m(x', x'') \cdot [Z^m(x''), \tilde{p}^{rs}(y)]d^3x' \cdot d^3x'' \qquad (59.25)$$

この右辺第1項は (59.15) で求めたように

$$\left\{\frac{1}{2}(\delta^r_i\delta^s_k + \delta^s_i\delta^r_k) - \frac{1}{3}\tilde{e}^{rs}(x) \cdot \tilde{g}_{ik}(x)\right\}\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

(59.25) 右辺第2項はとても複雑な式であるが，線形近似で書くと $\tilde{e}^{ik}, \tilde{g}_{ik}$ はいずれも δ_{ik} となるから，

$$
\text{右辺第2項} = -\frac{1}{6}\delta_{ik}\delta_{rs}\delta(\vec{x}-\vec{y})
$$
$$
+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varDelta}\{\delta_{ik}\partial_r\partial_s+\delta_{rs}\partial_i\partial_k-\delta_{ir}\partial_k\partial_s-\delta_{ks}\partial_i\partial_r-\delta_{is}\partial_k\partial_r-\delta_{kr}\partial_i\partial_s\}\right.
$$
$$
\left.+\frac{1}{\varDelta\varDelta}\partial_i\partial_k\partial_r\partial_s\right]\delta(\vec{x}-\vec{y})
$$

ついでに上にあたえた第1項も線形近似を使って簡単化すると，結局

$$
[\tilde{g}_{ik}(x),\tilde{p}^{rs}(y)]^* = ((56.32)\ \text{の右辺})
$$

となる.

以上で Dirac 括弧の話はおえる．このようにして座標条件は

$$
Z^i = \partial_k\tilde{e}^{ki} = 0
$$

におきかえてよいし，束縛条件 $\mathscr{H}_i\approx 0$ も $=0$ となる．したがって Hamiltonian 密度は $\mathscr{H}_{\text{main}}$ だけになってしまう．すなわち

$$
\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{main}}
$$
$$
= 2\kappa e^{-\frac{3}{2}q}\cdot\tilde{p}^{mn}\tilde{p}_{mn}+\frac{1}{8\kappa}e^{\frac{q}{2}}\cdot\tilde{g}_{ik,m}\tilde{g}_{jl,m}\tilde{e}^{ij}\{\tilde{e}^{kl}\cdot\tilde{e}^{mn}-2\tilde{e}^{kn}\tilde{e}^{ml}\}
$$
$$
-\frac{1}{\kappa}e^{-\frac{q}{2}}\tilde{e}^{ik}\partial_i(e^{\frac{q}{2}})\partial_k(e^{\frac{q}{2}}) \tag{59.26}
$$

となる．$p^k\cdot v_k$ の項が消えたのは，λ_k がでてこなくなったから，条件 $p^k\approx 0$ を $=0$ におきかえたことによる.

最後に1つ付け加える．Poisson 括弧を Dirac 括弧におきかえたために

$$
[g_{ik},\mathfrak{A}_\mu]^* = 0 \qquad [g_{ik},\mathfrak{B}_\mu]^* = 0
$$

となる．p^{rs} についても同様である．したがって Dirac 括弧は座標変換に対して不変，すなわち

$$
[g_{ik}'(x),p^{rs\prime}(y)]^* = [g_{ik}(x),p^{rs}(y)]^* = \text{不変}
$$

となる.

§ 60. 量子化の問題

Einstein の重力場の理論によれば，重力波が存在する．特に重力場が弱くて線型近似が許される場合には，重力波はいろいろの点で電磁波と非常によく似ている．そこで電磁場と同様に，重力場の量子化を考えることはきわめて自然である．特に線型近似の場合に，光子と同じように **"重力量子"** がエネルギーと運動量を荷なって，光速度 c をもって飛

行すると考えることは，量子電気力学のごく自然な一般化と思われる．

重力場の量子化の動機については，またつぎのようなこともある．量子論的場の理論の大きな欠点の1つは，この理論にしたがって，いろいろの物理量を計算すると，その答が無限大になるということである．たとえば量子電気力学を使って電子の自己エネルギーを計算すると，その答は無限大となる．この無限大は電子が自分のまわりに作る電磁場，すなわち，自己場と電子自身との相互作用による．自己場は量子論的にいえば，種々の運動量をもった光子の集団と考えられる．これらの光子は，電子によって放出されたり，再吸収されたりして，源の電子と相互作用をする．この相互作用を総計するのには，光子の運動量について積分すればよい．この積分が発散するために，自己エネルギーが無限大となる．この欠点をさけるために，運動量の積分の上限を，ある大きな値 $K_0\hbar(<\infty)$ で人為的に切断する．これは，波長が $1/K_0$ より短い光子と，電子との相互作用は，自己エネルギーの計算にはきかないということである．このことは或る意味で電子を有限な半径 $1/K_0$ をもった小球と考えることに相当する．

ところで電子の中心からの距離が $1/K_0(\approx 10^{-13}\,\mathrm{cm})$ ぐらいの所では，電子の作る電磁場の強さは非常に大きい．したがって，そこの電磁場のエネルギー密度も同様に大きいと考えられる．もし Einstein の理論がこのような極微の世界でも成り立つとすれば，この電磁エネルギー密度や電子の質量が作る重力場の影響は，電子のごく近くでは無視できないであろう．

いまかりに電子を $1/K_0$ の半径をもつ小球とすれば，（その表面にマイナスの電荷が分布していると仮定する），表面の電荷同志の間には，非常に強い斥力がはたらく．これは $K_0\to\infty$ と共に正の無限大の自己エネルギーを引きおこす．一方，上に述べたように重力を考えると，これは電子の質量同士の間の引力や，まわりの電磁場と電子の間の引力等をあたえる．これらは引力であるから，負の自己エネルギーとなる．もちろんこれも $K_0\to\infty$ と共に負の無限大となるが，上に述べた電磁的な正の無限大のエネルギーと打ち消し合って，たとえ $K_0\to\infty$ としても，すなわち点電子の場合でも，自己エネルギーの全体は有限値となるかもしれない．つまり重力的相互作用をも一緒に考えれば人為的に光子の運動量を切断する必要がないかもしれない．

このような考えは 1955 年頃 Pauli や Landau によって提唱されたが，彼らの説をまつまでもなく，すでに多くの人々によってばく然と同様のことが予想されていた．そこでこのような考え方にしたがって自己エネルギーを計算しようとすると，まず直面するのは重力場の量子化ということである．

さて一般に，場の古典理論を量子化するのには Heisenberg と Pauli の有名な方法がある．すなわちまず古典論を正準形式に書き表わす．場の量 $\varphi_A(x)$ とこれに正準共役な $\pi^A(x)$ との間には Poisson 括弧を定義する．この Poisson 括弧を使って場の方程式を正準形式で書き表わしておく．これらのことが完了したのちに，すべての物理量を量子論的演算子（これを **q-数** という）にすりかえる．同時に Poisson 括弧 $[A,B]$ は

$$[A,B]\to\frac{1}{i\hbar}(AB-BA)\stackrel{d}{\equiv}\frac{1}{i\hbar}[A,B]_-$$

で定義された交換関係式におきかえる．その結果，場の方程式は q-数 の間の関係式となる．

さて前節に述べたことにより，重力場については，古典論でやるべき準備はすでに完了している．したがって上の手続にしたがえば容易に量子化ができるように思われる．ここで重力の場合には Poisson 括弧のかわりに，Dirac 括弧を交換関係におきかえる．すなわち

$$\frac{1}{i\hbar}[A,B]_-=[A,B]-\sum_{\mu,\nu}[A,Y_\mu]\cdot Y_{\mu\nu}{}^{-1}[Y_\nu,B] \qquad (60.1)$$

とおく．この式の意味はつぎのようなものである．まず右辺を古典論として計算する．この計算結果には一般に φ や π がでてくるから，それらを，みな q-数におきかえる．そうした結果を左辺

$$\frac{1}{i\hbar}(AB-BA)$$

に等しいとおくという意味である．

これで重力場の量子化はできあがったように見えるが，実は詳細に検討すると，完成したと考えるわけにはいかない．Einstein の方程式は電磁場とちがって非線型方程式である．そこで方程式のなかにでてくる g_{ik} や p^{ik} が q-数の場合には，それらのならべ方の順序が問題となる．このことは，小さいようで，なかなか，やっかいな問題である．古典論で成り立つ関係も，g と p との順序のいれかえができないために，量子論では成り立たないということがしばしば起る．たとえば交換関係の新らしい定義（60.1）が Jacobi の恒等式を満足するかどうかは疑わしい．

順序の問題のほかに，古典論では許された操作が q-数では疑わしくなるものに，q-数の割り算と，q-数の開平がある．たとえば $\sqrt{J}$ という演算子は，J が常に正の固有値しかもたないときのみ意味のあるものである．もちろん古典論も，$J\leq 0$ のときには $\sqrt{J}$ は実数ではなくなるが，このような場合は，古典論においては，物理的でないからといっ

て除外できる*⁾．しかしこのような処置は量子論では一般にはむずかしい．割り算についても同様である．$\tilde{e}^{ik}$ を $\tilde{g}_{ik}$ の関数として表わそうとすると，割り算が必要になる．その場合に，$\tilde{g}_{ik}$ の演算子としての表示のしかたによっては，$\tilde{e}^{ik}$ の演算子としての性格が非常にわかりにくいものとなることがある．

上に述べた $J<0$ の問題は実は，正準理論の出発の仮定とも矛盾する．$x^0=$一定 という超曲面 σ はすべて空間的であると仮定した．このことは σ 面上の各点で $g_{ik}\cdot dx^i dx^k>0$ ということである．これは

$$g_{ii}>0, \qquad \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik} \\ g_{ki} & g_{kk} \end{vmatrix}>0, \qquad J>0 \tag{60.2}$$

が σ 上のすべての点で成り立つことである（§ 11 参照）．また $J>0$ が仮定されているからこそ，$\tilde{g}_{ik}$，$\tilde{p}^{ik}$ の定義もできたわけである．ところで古典論で $J\leqq 0$ となる可能性のあるのはつぎのような場合である．

まず $\exp(q/2)$ を $\tilde{g}_{ik}, \tilde{p}^{ik}$ の関数として表わしている方程式 (59.11)″ を考えてみよう．もし (60.2) が成立していれば，(59.11)″ は ϕ についての楕円形微分方程式である．特に重力場がよわくて $\tilde{e}^{ik}\approx\delta_{ik}$ とおけるときは，(59.11)″ の近似解は

$$-\phi(x)=e^{\frac{q}{2}}-1\approx G\int\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{main}}(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

そこで $\mathcal{H}_{\mathrm{main}}(x')\geq 0$ ならば

$$J(x)^{\frac{1}{6}}=e^{\frac{q}{2}}>1 \tag{60.3}$$

となる．したがって $J<0$ とはならない．しかし $\mathcal{H}_{\mathrm{main}}$ の中の最後の項（(59.26) 参照）の絶対値が大きくなると，$\mathcal{H}_{\mathrm{main}}$ は負となる可能性がある．このようなことは，重力場の源である物質粒子の近くでは起るであろう．このときは，もはや (60.3) も成り立たない．また (60.2) も成立しないから，(59.11)″ が楕円型方程式であるということも成立しなくなるかもしれない．

---

*⁾ 重力場の Lagrange 関数 $\sqrt{-g}\cdot R$ を，$g_{\mu\nu}(x)$ のかわりに，

$$\varphi_{\mu\nu}(x)=g_{\mu\nu}(x)\cdot(-g(x))^{-5/22}$$

を使って表わすと，$\sqrt{-g}\cdot R$ は $\varphi_{\mu\nu}$ およびその微分についての 11 次の整多項式となる．$\sqrt{}$ も分数もでてこない．これは量子論に移るのに好都合のように思われる．しかし $\varphi_{\mu\nu}$ に正準共役な量を定義して Hamiltonian 密度を求めようとすると，やはり割算が必要となる．また物質との相互作用を考えるときは，上に述べたようにうまくはいかない．$\varphi_{\mu\nu}$ のかわりに

$$\phi^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\cdot(-g)^{5/18}$$

を使うと，$\sqrt{-g}\cdot R$ は ϕ とその微分の 9 次の整多項式になる．

以上のことは古典論の枠の中での推論である．量子論にうつると，上と同様の困難が起ることは考えられる．しかも問題は，古典論以上にむずかしい．たとえば $\tilde{e}^{ik}(x)$ を対角線型にする表示を考えてみよう． そうすると $\tilde{e}^{ik}(\bar{x})$ は σ 上の各点 $\bar{x}$ において， $-\infty$ から $+\infty$ まで任意の値をとりうる．ただ次の制限さえ満足すればよろしい．

$$\det(\tilde{e}^{ik})=1, \quad \partial_k \tilde{e}^{ik}=0$$

したがって，(60.2) の条件は必ずしも成立していない． この場合 (60.2) は状態ベクトルに対する一種の“境界”条件と考えられる．

ともかく，形式的に，ごく表面的に考えると，古典正準形式からそのまま量子論の形式に移れるように思われるが，実は重力場の量子化は技術的にみて，まだ未完成であると断言できる．

以上のような数学的，技術的な困難についての議論はさておいて，ここでもう少し根本的な問題について考えてみよう．まず重力場を量子化しなくてはならない積極的理由があるであろうか．

電磁場の場合には，粒子と波動という２重性が実験的に確認された．したがって電磁場を記述するのに，古典 Maxwell 理論では不十分で，量子化はぜひとも必要であった．これに反して重力の場合には，重力波の存在すらまだ実証されていない．ましてその粒子性については全然証拠がない．電磁場のときには理論的にも量子化の必要性を指摘することができる．すなわちまず電子が量子力学にしたがうと仮定する．これと相互作用している電磁場を考えよう．もしこの相互作用に際して，エネルギーと運動量の保存則をみとめるならば，電子のエネルギーや運動量のもつ量子論的不確定性は，電磁場のそれに，同様の不確定性をひきおこす．したがって，電子と電磁場の相互作用している位置の不確定性とをあわせ考えると，電磁場についても量子力学的不確定性関係が成り立つことになる．これは電磁場が古典場ではあり得ないことを意味する．

線型近似の場合には以上と同様の論法を重力場に適用できる．しかし一般の近似を使わない厳密な理論の場合に，このような論法を使うことはむずかしい．すなわち物質粒子と相互作用している重力場について考えるとき，まずこまる問題は，重力場のエネルギー運動量が座標系のとり方に無関係な概念ではないということである．すでに述べたように，これらは擬テンソル密度である．したがって座標変換に対して不変な形式で，上述の電磁場に用いたと同じような議論を展開しようとしてもできそうには思えない．結論をいえば，いまのところ重力場の量子化を必要とする積極的な理由は発見しにくい．

さて，さきにも述べたように，重力場は素粒子物理学においても重要な役割を演ずるか

もしれないが，Einstein の理論を今の量子力学の処法にしたがって書きかえたものが，素粒子に適用できるということとは別のことである．いまかりに量子化ができたとしても，その理論が素粒子のような極微の世界にあてはまるか否かは，あらためて考えてみる必要がある．

もし仮りに量子化ができたとすると，当然のこととして，第 VII 章で述べた一般相対論の観測理論は，量子論的制約のためにいろいろ修正されることになるであろう．すでに述べたように一般相対論の根本概念はすべての物理現象が時空点で示されるということと，もう1つは2点間の4次元的不変距離である．これらの2つの根本概念は量子論と両立できるものであろうか．第 VII 章では2点間の不変距離は，これらの点が互いに空間的な関係にあっても，原子時計を使って距離測定ができることを示した．そこで距離測定の可能性についての問題は，結局原子時計の精度の問題に還元される．そこでいま原子時計について，量子力学がどのような制限をあたえるかを簡単に述べよう．

Wigner*) によると，相対論の観測理論に使われる原子時計は，量子力学的に考えると，決してミクロのものではありえないということになる．たとえば，ある原子時計を $T=24$ 時間使用するとしよう．この時計の精度を Δt，すなわち Δt（仮りに 10^{-8} sec とする）まで測定できるとする．簡単のために，この時計を1次元調和振動子で表わそう．さらに，たとえばはじめに基底状態から出発して時間のたつと共に順々に，この時計は異なる固有状態に移っていくとする．$T=24$ 時間後には $n=T/\Delta t\approx 10^{13}$ 個の異なった固有状態を経過することになる．ここでこの振動子の平均振幅を l として $l\approx c\cdot\Delta t$ とする．量子力学的考察によると，この振動子の質量 m は

$$m>\frac{n^3\hbar\Delta t}{l^2}\approx\frac{n^3\hbar}{c^2\Delta t}\approx 10^{-1}\text{g} \tag{60.4}$$

という制限をうけることになる．この m の下限は陽子の質量 $=1.66\times10^{-24}$g に比べてばく大なものである．天体現象をあつかう際には，(60.4) のような質量の制限は問題にならないが，素粒子論ではこの下限の存在は無視できない．

ところで (60.4) を出すのには，別に一般相対論は使っていない．したがって，普通の量子論でも，そこに使われている座標とか距離の値を特殊相対論の範囲内で測定しようとすると，(60.4) の値が問題になるはずである．それにもかかわらず，普通の場の量子論が（無限大の欠点は別として）素粒子物理学で使われるのは次の理由による．

すなわち普通の場の量子論でも，時間，空間座標を使うが，これはいわばパラメーター

*) E. P. Wigner : Rev. Mod. Phys. 29 (1957) p. 255

で，観測の対象とはならないということである．実際素粒子物理学では，素粒子反応のはじめとおわりの状態をマクロ的に観測すればことたりる．反応の途中で素粒子同志が，どの時空点で衝突したというようなことは一切問題にしないからである．これに反して，一般相対論的に素粒子を考えるときは，これらの時空内の位置は，観測の対象となる．したがって，(60.4) のような制限は大きな障害となる

20 世紀の物理学の 2 大理論は量子力学と相対論である． これら 2 つの大きな流れはいずれは，何かの形で合流すべきものと思うが，それがいま試みられているような“量子化”という形で実現されるかどうかはわからない．この合流をする前にそれぞれの理論に登場する根本概念に或る程度の修正をする必要がおこるかもしれない．

なお重力場の正準理論，および量子化に関する論文は近年，比較的多くなってきているが，その中で代表的なものを 2，3 下にならべておく．

(1) J,L, Anderson and P.G. Bergmann : Phys. Rev. **83**, (1951) p.1018

(2) R. Arnowitt and S. Deser : Phys, Rev. **113**, (1959) p.745

(3) R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner : Phys. Rev. **116**, (1959) p.1322 同じく **117**, (1960) p.1595

(4) B.S. DeWitt : “Dynamical Theory of Groups and Fields” (1964) Gordon and Breach, New York.

(5) P.A.M. Dirac : Proc. Roy. Soc. A, **246**, (1958) p.326 および p.333, Phys. Rev. **114**, (1959). p.924.

付　　　　録

§ A.1　時空が Minkowski 型であるための条件（本文 46 ページ）

本文 46 頁に述べたように，時空内の有限な領域 Ω の内部が Minkowski 型であるための必要十分条件は，Ω 内の任意の点で

$$R^{\lambda}{}_{\rho,\mu\nu}=0 \tag{A.1-1}$$

が成立することである．

まず必要条件であることを示そう．すなわち Ω の内部が Minkowski 型だとすれば，適当に直交座標系 X^{μ} ($\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3$) をえらべば，不変距離の 2 乗 ds^2 は

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}\,dX^{\mu}\cdot dX^{\nu} \tag{A.1-2}$$

となる．したがって，アフィン係数はすべて 0 となり，曲率テンソルについては (A.1-1) が成り立つ． ところで (A.1-1) の左辺はテンソルであるから，(A.1-2) のような直交座標系から任意の曲線座標系に変換しても， ひとたび (A.1-1) が成立すれば， どのような座標系でも曲率テンソルのすべての成分は 0 となる．

次に十分条件であることを示すのには，Ω 内で (A.1-1) が成立しているとき，(A.1-2) となるような座標系を実際に Ω 内に作ってみせればよい．

いま Ω の内部に 4 個の共変ベクトル場

$$h_{\mu}^{(0)}(x),\ h_{\mu}^{(1)}(x),\ h_{\mu}^{(2)}(x),\ h_{\mu}^{(3)}(x)$$

を考えよう．この右肩の添字 (a) $(a=0,1,2,3)$ はベクトルの番号を示すもので，ベクトル成分を示す記号は下のギリシャ字である．この 4 個のベクトルは

$$h_{\mu}^{(a)}(x)\cdot h_{\nu}^{(b)}(x)\cdot g^{\mu\nu}(x)=\eta^{ab}\overset{d}{\equiv}\begin{cases}1 & a=b=1,\ 2,\ 3\\ 0 & a\neq b\\ -1 & a=b=0\end{cases} \tag{A.1-3}$$

という直交関係を満足するものとする．すなわち 4 個のうちで，$h_{\mu}^{(0)}$ は大きさが 1 の時間的ベクトルであり，他の 3 個はやはり大きさが 1 の空間的ベクトルで，これらは互いに直交するものとする．

ここでさらに条件をつけて各ベクトルは

$$\frac{\partial h_{\rho}^{(a)}}{\partial x^{\mu}}=\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}(x)\cdot h_{\sigma}^{(a)}\quad (a=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{A.1-4}$$

を満足するものとする．ここで x－系から見たアフィン係数 Γ は，もちろんあらかじめあたえられてあるものとする．(A.1-4) は

$$\nabla_{\mu}h_{\rho}^{(a)}=0 \tag{A.1-4$'$}$$

と同じことである．(A.1-4)$'$ と (A.1-3) の条件とは

$$\nabla_{\mu}g^{\alpha\beta}=0$$

のために互いに矛盾しないことがわかる．

さて（A.1－4）を満足する $h_\rho^{(a)}$ が存在するためには，すなわち（A.1－4）が解をもつためには，積分可能の条件

$$\frac{\partial^2 h_\rho^{(a)}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_\rho^{(a)}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0 \qquad \text{(A.1－5)}$$

が成立する必要がある．いま（A.1－4）をもう1度微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial h_\rho^{(a)}}{\partial x^\mu}\right) = \left(\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right) h_\lambda^{(a)}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial h_\rho^{(a)}}{\partial x^\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial h_\rho^{(a)}}{\partial x^\nu}\right)$$
$$= (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\cdot\Gamma^\sigma_{\nu\rho}) h_\lambda^{(a)} \stackrel{d}{\equiv} R^\lambda{}_{\rho,\nu\mu}\cdot h_\lambda^{(a)}$$

となる．この最後の量は（A.1－1）のために Ω 内では0となる．したがって積分可能の条件（A.1－5）は Ω 内では成立している．それゆえ，連立方程式（A.1－4）を満足するベクトル場 $h_\mu^{(a)}$ は存在する．

さて，われわれがいま考えている Γ は

$$\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = \Gamma^\sigma_{\rho\mu}$$

であるから（A.1－4）から

$$\frac{\partial h_\rho^{(a)}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial h_\mu^{(a)}}{\partial x^\rho} \quad (a = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(A.1－6)}$$

となる．

ここで静電気学によくでてくる関係式

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{(A.1－7)}$$

を思いだしてみよう．この式が成り立つときは $\vec{E}$ は

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\Phi \qquad \text{(A.1－8)}$$

の形に必ず書き表わされる．ここに Φ は $\vec{E}$ によってきまるスカラー関数である．(A.1－6) は（A.1－7）を4次元時空に拡張したものにほかならない．つまり $\vec{E}$ という3次元ベクトルには，$h_\mu^{(a)}$（a は任意に固定しておく）という4次元共変ベクトルが対応する．そこで（A.1－8）にならって，$h_\mu^{(a)}$ は

$$h_\mu^{(a)}(x) = \frac{\partial \Phi^{(a)}(x)}{\partial x^\mu} \quad (a = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(A.1－9)}$$

という形に必ず書き表わされる．ここで $\Phi^{(a)}$ は4個のスカラー関数で

$$\Phi^{(a)}(x) = \int_O^P h_\mu^{(a)}(x')\,dx^{\mu'} \qquad \text{(A.1－10)}$$

で定義される．(A.1－10) の右辺の積分は Ω 内の任意にきめた定点 O と，Ω 内の他の

任意の1点P（その座標をx）とを結ぶある曲線Cに沿うて積分するものとする．したがって普通にはこの積分の値は，上限の点Pの位置，すなわちxの関数であるばかりでなくその道筋Cにも依存する．しかしいまは（A.1-6）のために，積分の値はCには無関係で，ただxだけの関数である．

さて，点Pの位置を示すのにいままでは座標x^μを用いたが，このかわりに，

$$y^a = \Phi^{(a)}(x) \quad (a = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

という4組の数値y^aを使ってもよい．これはxからyへの1種の座標変換である*)．これに応じて不変距離の2乗は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \cdot dx^\nu = \sum_{a\cdot b=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b}dy^a dy^b$$

これからはラテン文字a, $b\cdots$等についてもテンソル算法にまねて，同じ字が2度でてきたときは，0から3まで和をとるものと約束する．そこで

$$ds^2 = g'_{ab}(y)dy^a dy^b \qquad g'_{ab}(y) \overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} \qquad \text{(A.1-11)}$$

さて，等式

$$h_\rho^{(a)}(x)\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^a} = \frac{\partial y^a}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^a} = \delta_\rho^\sigma$$

の両辺に

$$g^{\mu\rho}h_\mu^{(b)}(x)$$

をかけると

$$g^{\mu\rho}h_\mu^{(b)}h_\rho^{(a)}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^a} = g^{\mu\sigma}h_\mu^{(b)}$$

この左辺を（A.1-3）を使って書き直すと

$$\eta^{ba}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^a} = g^{\mu\sigma}h_\mu^{(b)}$$

あるいは，両辺にη_{bc}をかけて

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^c} = \eta_{bc}h_\mu^{(b)}\cdot g^{\mu\sigma} \qquad \text{(A.1-12)}$$

となる．これを（A.1-11）に代入すると

$$g'_{ab}(y) = \eta_{ab} \qquad ds^2 = \eta_{ab}dy^a dy^b$$

となる．この最後のds^2の形から，座標系-(y)はΩ内でMinkowski型の直交座標系となっていることがわかる．

証明終り

---

*) y^aを新らしい座標として扱えるためには，$y^a(x)$が互いに関数的に独立である必要がある．すなわち，$\partial\Phi^{(a)}/\partial x^\mu = h_\mu^{(a)}$から作った行列式が0でないことを証明しなければならない．このことは（A.1-3）から容易に証明できる．

§ A.2 48 頁の定理の証明

まず $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\lambda}(\overset{d}{\equiv}\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda})$, および $g_{\mu\nu,\lambda\sigma}(\overset{d}{\equiv}\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda}\cdot\partial x^{\sigma})$だけから作られる2階対称共変テンソルを $T_{\mu\nu}(x)$ とする．ただしこの $T_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の2階微分については1次式とするとき，この最も一般なものは

$$T_{\mu\nu}=C_1R_{\mu\nu}+C_2\cdot g_{\mu\nu}R+C_3 g_{\mu\nu} \qquad (\text{A.}2-1)$$

となることを証明しよう．ただし C_1, C_2, C_3 は任意の定数である．

いま簡単のために時空内の任意の1点 P を座標原点にえらび，この点において測地系を考える．さらにこの測地系に，適当な1次座標変換を行なって，P点では

$$g_{\mu\nu}(P)=\eta_{\mu\nu}, \qquad g_{\mu\nu,\lambda}(P)=0, \qquad g_{\mu\nu,\lambda\sigma}(P)\neq 0 \qquad (\text{A.}2-2)$$

となるようにする．これから P 点において，上に述べたような性質をもったテンソルを求めてみよう．

(A.2-2) のために，$T_{\mu\nu}$ の中に含まれる g の1階微分はすべて0となる．$T_{\mu\nu}$ は g の2階微分については1次式であるから，その最も一般的な形は

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}(P)=&\{Ag_{\alpha\beta,\mu\nu}+Bg_{\mu\nu,\alpha\beta}+C(g_{\mu\alpha,\nu\beta}+g_{\nu\alpha,\mu\beta})\}\eta^{\alpha\beta}\\&+\eta_{\mu\nu}(Dg_{\alpha\beta,\rho\sigma}+Eg_{\alpha\rho,\beta\sigma})\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}+F\eta_{\mu\nu}\end{aligned} \qquad (\text{A.}2-3)$$

となる．A, B, $\cdots$, F はすべて任意の定数である．

この $T_{\mu\nu}$ は μ, ν について対称であることはすぐにわかるが，これが一般座標変換に対してテンソルかどうかはまだわからない．そこでこれから次のような特別な座標変換

$$x^{\mu}\to x^{\mu\prime}=x^{\mu}-\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\delta}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\delta}+O((x)^4)$$

または逆に書いて

$$x^{\mu}=x^{\mu\prime}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\delta}x^{\alpha\prime}x^{\beta\prime}x^{\delta\prime}+O((x')^4) \qquad (\text{A.}2-4)$$

を考えてみよう．ここで定数の係数 $a^{\mu}_{\alpha\beta\delta}$ は無限小のパラメーターとする．

この変換に対して点 P (すなはち，$x^{\mu}=0$, $x^{\mu\prime}=0$, $\mu=0, 1, 2, 3$) においては次の関係が成立する．

$$\left.\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu\prime}}\right)_P=\delta^{\mu}_{\nu}, \quad \left.\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\nu}}\right)_P=\delta^{\mu}_{\nu}, \quad \left.\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\lambda\prime}\cdot\partial x^{\nu\prime}}\right)_P=0, \quad \left.\frac{\partial^3 x^{\mu}}{\partial x^{\tau\prime}\cdot\partial x^{\lambda\prime}\cdot\partial x^{\sigma\prime}}\right)_P=a^{\mu}_{\tau\lambda\sigma}$$

ここで $F)_P$ とは P 点における F の値を示す．このことを使うと変換 (A.2-4) に対して

$$\left.g_{\mu\nu}'(x')\right)_P=\left.g_{\mu\nu}(x)\right)_P=\eta_{\mu\nu}, \qquad \left.\frac{\partial g_{\mu\nu}'(x')}{\partial x^{\lambda\prime}}\right)_P=0 \qquad (\text{A.}2-5)$$

となることはすぐにわかる．つまりこの変換を行なっても測地系の性質はそこなわれない．しかし g の2階微分は次のようになる．

$$\left.\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}'(x')}{\partial x^{\alpha\prime}\partial x^{\beta\prime}}\right)_P=\left.\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\right)_P+\eta_{\tau\nu}\cdot a^{\tau}_{\mu\alpha\beta}+\eta_{\tau\mu}a^{\tau}_{\nu\alpha\beta} \qquad (\text{A,}2-6)$$

この (A.2-6) を使うと $T_{\mu\nu}(P)$ の変換後の量を計算できる．すなわち，

$$T_{\mu\nu}'(x')\Big)_P = T_{\mu\nu}(x)\Big)_P + \eta^{\alpha\beta}\{2A\eta_{\tau\beta}a^{\tau}_{\alpha\mu\nu} + B\eta_{\tau\nu}a^{\tau}_{\mu\alpha\beta} + B\eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\nu\alpha\beta}$$
$$+ C\eta_{\tau\alpha}a^{\tau}_{\mu\nu\beta} + C\eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\alpha\nu\beta} + C\eta_{\tau\alpha}a^{\tau}_{\nu\mu\beta} + C\eta_{\nu\tau}a^{\tau}_{\alpha\mu\beta}\}$$
$$+ \eta_{\mu\nu}(2D\eta_{\tau\beta}a^{\tau}_{\alpha\rho\sigma} + E\eta_{\tau\rho}a^{\tau}_{\alpha\beta\sigma} + E\eta_{\alpha\tau}\cdot a^{\tau}_{\rho\beta\sigma})\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}$$

これは適当に添字のかきかえをすることにより次のようになる.

$$T_{\mu\nu}'(x')\Big)_P = T_{\mu\nu}(x)\Big)_P + 2(A+C)a^{\alpha}_{\alpha\mu\nu}$$
$$+ (B+C)\eta^{\alpha\beta}(\eta_{\nu\tau}a^{\tau}_{\mu\alpha\beta} + \eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\nu\alpha\beta}) + 2(D+E)\eta_{\mu\nu}a^{\alpha}_{\alpha\rho\sigma}\eta^{\rho\sigma} \qquad \text{(A.2-7)}$$

一方, $T_{\mu\nu}$ はテンソルであるから

$$T_{\mu\nu}'(x')\Big)_P = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}T_{\alpha\beta}(x)\Big)_P = T_{\mu\nu}(x)\Big)_P$$

これを (A.2-7) に代入すると, (A.2-7) の右辺の第 2 項以下はすべて 0 でなければならない. それゆえ, 6 個の任意定数 $A, B, \cdots$ の間には

$$A = B = -C, \quad D = -E$$

という関係が成立する必要がある. そこで $T_{\mu\nu}(P)$ はこの測地系からみると,

$$T_{\mu\nu}(P) = A\eta^{\alpha\beta}\{g_{\alpha\beta,\mu\nu} + g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\mu\alpha,\nu\beta} - g_{\nu\alpha,\mu\beta}\}\Big)_P$$
$$+ D\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\{g_{\alpha\beta,\rho\sigma} - g_{\alpha\rho,\beta\sigma}\}\Big)_P + F\eta_{\mu\nu} \qquad \text{(A.2-8)}$$

となる.

さて, Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} = (g_{\alpha\beta,\rho\sigma}\text{ の 1 次式}) + (g_{\alpha\beta,\rho}\text{ の 2 次式})$$

という形をしている. それゆえ, ここで考えている測地系では $R_{\mu\nu}$ は上の第 1 項だけとなり

$$R_{\mu\nu}\Big)_P = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\{g_{\alpha\beta,\mu\nu} + g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} - g_{\alpha\nu,\beta\mu}\}\Big)_P \qquad \text{(A.2-9)}$$

となる. またこれから作られるスカラー曲率Rは

$$R\Big)_P = \cdot\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\{g_{\alpha\beta,\rho\sigma} - g_{\alpha\rho,\beta\sigma}\}\Big)_P \qquad \text{(A.2-10)}$$

となる.

(A.2-2), (A.2-9), (A.2-10) と (A.2-8) を比較すると

$$T_{\mu\nu}(P) = 2AR_{\mu\nu}(P) + D\cdot g_{\mu\nu}R(P) + Fg_{\mu\nu}(P) \qquad \text{(A.2-11)}$$

となる. (A.2-11) は点 P における測地系を用いたときに成り立つ関係式である. しかしこの両辺はともにテンソルであるから, この関係は任意の座標変換をほどこしても, そのまま成立する. それゆえ, $T_{\mu\nu}$ の一般形は

$$T_{\mu\nu}(x) = C_1R_{\mu\nu}(x) + C_2g_{\mu\nu}R(x) + C_3g_{\mu\nu}(x) \qquad \text{(A.2-11)}'$$

である. ここに C_1, C_2, C_3 は任意の定数である.

もしも $T_{\mu\nu}$ が任意の $g_{\alpha\beta}(x)$ に対して恒等的に

$$\nabla_\mu(g^{\mu\rho}T_{\rho\nu})\overset{d}{\equiv}\nabla_\mu(T^\mu{}_\nu)\equiv 0$$

を満足するものとすれば，上の C_1C_2 の間にはある関係がつく．すなわち，恒等式

$$\nabla_\mu\left(R^\mu{}_\nu-\frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R\right)\equiv 0$$

を使うと

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu=\frac{C_1}{2}\nabla_\nu R+C_2\nabla_\nu R\equiv 0$$

となるから

$$C_2=-\frac{C_1}{2}$$

となる必要がある．そこで $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu\equiv 0$ を満足する最も一般なテンソルは

$$T_{\mu\nu}=C_1\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)+C_3 g_{\mu\nu}$$

証明終り．

§A.3 正準および対称エネルギー運動量・テンソルの関係

（本文 103 ページ）

一般相対論の本筋からすこしはずれるが，特殊相対論の範囲内で対称エネルギー・運動量テンソル密度をどのようにして作ることができるかを示そう．この問題は素粒子論を専攻する人々も，しばしば出会す問題で，実用上からもこの方法を知っておくと便利である*)．

さて正準および対称エネルギー・運動量テンソルを，それぞれ

$$T^\mu{}_\nu\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L_M}{\partial\varphi_{A,\mu}}\varphi_{A,\nu}-\delta^\mu_\nu L_M \qquad L_M=L_M(\varphi_A,\ \partial_\mu\varphi_A,\ \eta_{\mu\nu})$$

および

$$\Theta^{\mu\nu}=\Theta^{\nu\mu} \tag{A.3-1}$$

とする．上の $T^\mu{}_\nu$ の定義から，一般には

$$T^{\mu\nu}=\eta^{\nu\rho}T^\mu{}_\rho\neq T^{\nu\mu}$$

である．

いま

$$\Theta^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}T^{\mu\nu}+X^{\mu\nu} \tag{A.3-2}$$

とおく．この $X^{\mu\nu}$ をどのようにきめればよいかを，これからしらべよう．まず $\Theta^{\mu\nu}$ も $T^{\mu\nu}$ も保存則を満足しなければいけないから，

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu}=\partial_\mu T^{\mu\nu}+\partial_\mu X^{\mu\nu}=\partial_\mu X^{\mu\nu}=0 \tag{A.3-3}$$

ここで角運動量テンソル密度 $R^{[\rho\sigma],\mu}$ と $T^{\mu\nu}$ との関係を思いだそう．それは本文の (27.6) により

---

*) 伏見康治：学術研究会議編：物理学講演集 4 (1944), p.81

$$R^{[\rho\sigma]\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L_M}{\partial \varphi_{A,\mu}}(M^{\rho\sigma})_A{}^B \cdot \varphi_B - (T^{\mu\rho} \cdot x^\sigma - T^{\mu\sigma} \cdot x^\rho)$$

で定義され，保存則

$$\partial_\mu R^{[\rho\sigma]\mu} = 0 \qquad \text{(A. 3-4)}$$

を満足する．したがって（A. 3-4）は

$$\partial_\mu S^{[\rho\sigma]\mu} - T^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma} = 0 \qquad \text{(A. 3-4)}'$$

となる．ここで $S^{[\rho\sigma]\mu}$ はスピン角運動量テンソル密度

$$S^{[\rho\sigma]\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L_M}{\partial \varphi_{A,\mu}}(M^{\rho\sigma})_A{}^B \cdot \varphi_B = -S^{[\sigma\rho]\mu}$$

である．

一方（A. 3-1）と（A. 3-2）から

$$-T^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma} = X^{\sigma\rho} - X^{\rho\sigma}$$

であるから，(A. 3-4)′ は

$$\partial_\mu S^{[\rho\sigma]\mu} = X^{\rho\sigma} - X^{\sigma\rho} \qquad \text{(A. 3-4)}''$$

となる．ところで上の結果と（A. 3-3）とを比べると

$$X^{\mu\nu} = \partial_\lambda Y^{[\lambda\mu]\nu} \qquad Y^{[\lambda\mu]\nu} = -Y^{[\mu\lambda]\nu} \qquad \text{(A. 3-5)}$$

とおいてもよかろう．(A. 3-5）とおくことができれば，（A. 3-3）は恒等的に成立する．そこで (A. 3-5) を (A. 3-4)″ に代入し，$\partial/\partial x^\mu$ を両辺からはずして，(A. 3-4)″ のかわりに

$$S^{[\rho\sigma]\mu} = Y^{[\mu\rho]\sigma} - Y^{[\mu\sigma]\rho} \qquad \text{(A. 3-6)}$$

とおく．すなわち（A. 3-4)″ よりもさらに強い条件（A. 3-6）を満足するようなYを求めてみよう．このYをSで書き表わすことは容易にできる．（A. 3-6）の $\rho\sigma\mu$ を循環的にいれかえて

$$S^{[\mu\rho]\sigma} = Y^{[\sigma\mu]\rho} - Y^{[\sigma\rho]\mu} \qquad \text{(A. 3-6)}'$$

$$S^{[\sigma\mu]\rho} = Y^{[\rho\sigma]\mu} - Y^{[\rho\mu]\sigma} \qquad \text{(A. 3-6)}''$$

(A. 3-6) + (A. 3-6)′ − (A. 3-6)″ から

$$Y^{[\sigma\mu]\rho} = \frac{1}{2}\{S^{[\rho\sigma]\mu} + S^{[\mu\rho]\sigma} - S^{[\sigma\mu]\rho}\} \qquad \text{(A. 3-7)}$$

そこでこれを（A. 3-5)，(A. 3-2）に代入すると

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\sigma\{S^{[\nu\sigma]\mu} + S^{[\mu\nu]\sigma} - S^{[\sigma\mu]\nu}\} \qquad \text{(A. 3-8)}$$

これを使って全エネルギー・運動量を計算してみよう．すなわち

$$\int \Theta^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x + \frac{1}{2}\int \partial_\sigma\{S^{[\nu\sigma]0} + S^{[0\nu]\sigma} - S^{[\sigma 0]\nu}\} d^3x$$

この最後の項は $\sigma=0$ とすると恒等的に0となるから，σ のとりうる値は $1 \to 3$ までである．それゆえ

$$\text{最後の項} = \frac{1}{2}\int \sum_{k=1}^{3} \partial_k\{S^{[\nu k]0} + S^{[0\nu]k} - S^{[k0]\nu}\} d^3x$$

これは Gauss の定理から，表面積分となるので，遠方で φ_A や $\varphi_{A,\mu}$ が早く 0 となるときは，この表面積分はいらない．したがって，

$$\int \Theta^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x$$

となる．つまり全エネルギー・運動量については，Θ を使っても，T を使っても同じ値となる．

つぎに角運動量テンソル密度を考えてみよう．いま

$$R'^{[\rho\sigma]\mu} \overset{d}{\equiv} -\{\Theta^{\mu\rho}\cdot x^\sigma - \Theta^{\mu\sigma}\cdot x^\rho\} \tag{A.3-9}$$

とおく．この Θ に (A.3-8) を代入すると，微分について少し変形をおこなうと

$$\begin{aligned} R'^{[\rho\sigma]\mu} &= -\{T^{\mu\rho}\cdot x^\sigma - T^{\mu\sigma}\cdot x^\rho\} + S^{[\rho\sigma]\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_\lambda\Big[x^\rho(S^{[\sigma\lambda]\mu} + S^{[\mu\sigma]\lambda} - S^{[\lambda\mu]\sigma}) - x^\sigma(S^{[\rho\lambda]\mu} + S^{[\mu\rho]\lambda} - S^{[\lambda\mu]\rho})\Big] \\ &= R^{[\rho\sigma]\mu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda U^{[\rho\sigma][\lambda\mu]} \end{aligned}$$

となる．ただし $U^{[\rho\sigma][\lambda\mu]}$ は $[\rho\sigma]$ についても，$[\lambda\mu]$ についても反対称である． そこで全角運動量テンソル $M^{[\rho\sigma]}$ は

$$M^{[\rho\sigma]} \overset{d}{\equiv} \int R'^{[\rho\sigma]0} d^3x = \int R^{[\rho\sigma]0} d^3x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int \partial_k U^{[\rho\sigma][k0]} d^3x$$

となる．この最後の項もエネルギーの場合と同様に消えるから

$$M^{[\rho\sigma]} = \int R'^{[\rho\sigma]0} d^3x = \int R^{[\rho\sigma]0} d^3x$$

となる．

ところで一般相対論では物質の対称エネルギー・運動量テンソル密度は (18.17) により

$$-2\frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} \overset{d}{\equiv} -2\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathfrak{L}_M}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right)\right\}$$

であたえられる．ここで $\mathfrak{L}_M$ は，特殊相対論的な $L_M = L_M(\varphi_A,\ \partial_\mu\varphi_A,\ \eta_{\mu\nu})$ の中の $\partial_\mu\varphi_A$ を $\nabla_\mu\varphi_A$ におきかえ，$\eta_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}$ にすりかえ，さらに $\sqrt{-g}$ をかけたものである．

すなわち，

$$\mathfrak{L}_M = \sqrt{-g}\,L_M(\varphi_A,\ \nabla_\mu\varphi_A,\ g_{\mu\nu})$$

ここで求めた $\Theta^{\mu\nu}$ が

$$\Theta^{\mu\nu} = \lim_{g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}}\left(-2\frac{\delta\mathfrak{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}\right)$$

の関係を満足することを証明するのは，それほどむずかしくはないから，読者は自分で試みてもらいたい．

§ A.4　正準形式による場の理論 (本文 232 ページ)

簡単のために，スカラー場 φ を考える．φ は x と $t = x^0/c$ の関数とする． つまり空間は 3 次元でなくて 1 次元空間だとする． 場の方程式は Hamilton の原理により作用積分

$$I = \iint \mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi)dxdt \qquad \text{(A.4-1)}$$

から変分によって導きだされる．すなわち

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial_x\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial_t\varphi}\right) \qquad \text{(A.4-2)}$$

ここに

$$\partial_x\varphi \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \partial_t\varphi \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

いま全空間を無数の小区間に分割し，各区間の幅は一様に $\varDelta$ であるとする．このようにすると任意の点 P(その座標を x) は，その点が存在する区間の番号 n で近似的に表わすことができる．この場合 $x \approx n\varDelta$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ である．同じ区間の中にある 2 点（その座標を $x,\ x'$ とする）は近似的に同一視する． つまり $x \approx n\varDelta,\ x' \approx n\varDelta$ ならば，これらの点は共に同じ番号 n で表わされる．また点 x における $\varphi(x,t)$ は

$$\varphi(x,t) \rightarrow \varphi_n(t) \quad x \approx n\varDelta$$

のように書くことにする．φ の微分は

$$\partial_x\varphi(x,t) \rightarrow \frac{1}{\varDelta}\{\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\}$$

$$\partial_t\varphi(x,t) \rightarrow \dot{\varphi}_n(t)$$

のように表わす．同様に

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}\{\varphi(x,t),\ \partial_x\varphi(x,t),\ \partial_t\varphi(x,t)\}\\ &\quad\rightarrow \mathfrak{L}\left\{\varphi_n(t),\ \frac{1}{\varDelta}\varphi_{n+1}(t) - \frac{1}{\varDelta}\varphi_n(t),\ \dot{\varphi}_n(t)\right\}\\ &\quad\stackrel{d}{\equiv} \mathfrak{L}\{\varphi_n(t),\ \varphi_{n+1}(t),\ \dot{\varphi}_n(t)\} \stackrel{d}{\equiv} \mathfrak{L}(n,t)\end{aligned} \qquad \text{(A.4-3)}$$

と書きかえる．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{L}\{\varphi(x,t),\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi\}dx \rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty}\varDelta\cdot\mathfrak{L}(n,t) \stackrel{d}{\equiv} L \qquad \text{(A.4-4)}$$

とおく．この L は $\varphi_n(t)$ $\dot{\varphi}_n(t)$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ の関数である．すなわち

$$\begin{aligned}L &\stackrel{d}{\equiv} L\{\varphi_0,\ \varphi_{\pm 1},\ \cdots,\ \varphi_n(t)\cdots;\ \dot{\varphi}_0,\ \dot{\varphi}_{\pm 1},\ \cdots,\ \dot{\varphi}_n(t)\cdots\}\\ &\stackrel{d}{\equiv} L\{\cdots\varphi_n(t)\cdots,\ \cdots\dot{\varphi}_n(t)\cdots\}\end{aligned}$$

以上の書きかえは $\varDelta \rightarrow 0$ の極限ではすべてもとの数式に一致する． すなわち → 印はすべて ＝ にもどる．

そこでこれから (A.4-1) のかわりに

$$I_\varDelta \stackrel{d}{\equiv} \int L\{\cdots\varphi_n(t)\cdots;\ \cdots\dot{\varphi}_n(t)\cdots\}dt \qquad \text{(A.4-1)}'$$

を考える．これはちょうど無限個の自由度をもつ質点系の作用積分と同じである．質点系の位置座標 $q_n(t)$ のかわりに無限個の $\varphi_n(t)$ が対応している．運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_n}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_n}\right) \tag{A. 4-5}$$

となる．この式は一見（A. 4－2）と異なるようであるが，$\varDelta \to 0$ の極限では（A. 4－2）と完全に一致することがつぎのようにして証明できる．

まず定義（A. 4－3)，(A. 4－4）から，Lの中で φ_n が含まれているのは $\mathfrak{L}(n-1,t)$ と $\mathfrak{L}(n,t)$ だけであるから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi_n}&=\frac{\partial}{\partial \varphi_n}\Big[\varDelta\cdot\mathfrak{L}\{\varphi_{n-1},\ \varphi_n,\ \dot{\varphi}_{n-1}\}+\varDelta\cdot\mathfrak{L}\{\varphi_n,\ \varphi_{n+1},\ \dot{\varphi}_n\}\Big]\\
&=\varDelta\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi_n}\left[\mathfrak{L}\left\{\varphi_{n-1},\ \frac{1}{\varDelta}(\varphi_n-\varphi_{n-1}),\ \dot{\varphi}_{n-1}\right\}+\mathfrak{L}\left\{\varphi_n,\ \frac{1}{\varDelta}(\varphi_{n+1}-\varphi_n),\ \dot{\varphi}_n\right\}\right]\\
&\fallingdotseq\varDelta\cdot\left[\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi)}{\partial(\partial_x\varphi)}\right\}_{x-\varDelta}\cdot\frac{1}{\varDelta}+\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi)}{\partial\varphi}\right\}_x\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi)}{\partial(\partial_x\varphi)}\right\}_x\cdot\left(-\frac{1}{\varDelta}\right)\right]\\
&=\varDelta\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}\right)_x-\frac{1}{\varDelta}\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_x\varphi)}\right)_x-\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_x\varphi)}\right)_{x-\varDelta}\right\}\right]\\
&\fallingdotseq\varDelta\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_x\varphi)}\right)\right]
\end{aligned}$$

また

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_n}\fallingdotseq\varDelta\frac{\partial\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi)}{\partial(\partial_t\varphi)}$$

これらを（A. 4－5）に代入すれば完全に（A. 4－2）と一致することがわかる*).

質点力学との対応が明らかになったから，（A. 4－1)′ を正準形式に書きなおすことを考えよう．

$\varphi_n(t)$ に正準共役な量を $p_n(t)$ とすると，これは

$$p_n(t)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_n(t)} \tag{A. 4-6}$$

であたえられる．また全系の Hamiltonian H は

$$H(\cdots p_n\cdots;\ \cdots\varphi_n\cdots)\overset{d}{\equiv}\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_n\cdot\dot{\varphi}_n-L \tag{A. 4-7}$$

となる．質点力学でよく知られているように（A. 4－7）の中にでてくる $\dot{\varphi}_n$ は（A. 4－6）の関係を使ってすべて p_n, φ_n で書きかえるものとする．したがって（A. 4－7）の右辺は p_n, φ_n の関数で，$\dot{\varphi}_n$ は消去されているものとする．

正準変数 p_n, φ_n を使うと場の方程式（A. 4－5）は

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\varphi}_n&=\frac{\partial H}{\partial p_n}\\
\dot{p}_n&\overset{d}{\equiv}\frac{d}{dt}p_n=-\frac{\partial H}{\partial \varphi_n}
\end{aligned}\right\}\quad(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots) \tag{A. 4-8}$$

*) $\fallingdotseq$ は近似的に等しいことを示す．

となる．

ここで **Poisson 括弧** を定義しよう．いま A, B はいずれも，$\varphi_n(t)$, $p_n(t)$ $(n=0, \pm 1, \cdots)$ の任意の関数とする．そこで

$$[A, B] \overset{d}{\equiv} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial A}{\partial \varphi_n(t)} \cdot \frac{\partial B}{\partial p_n(t)} - \frac{\partial A}{\partial p_n(t)} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varphi_n(t)} \right\} \qquad \text{(A.4-9)}$$

のように Poisson 括弧 $[A, B]$ を定義する．A, B として，たとえば $A=\varphi_i(t)$　$B=p_k(t)$ をとると

$$[\varphi_i(t),\ p_k(t)] = \delta_{ik}$$

となる．またつぎの関係は定義からすぐにわかる．

$$[\varphi_i(t),\ \varphi_k(t)] = [p_i(t),\ p_k(t)] = 0 \qquad \text{(A.4-10)}$$

$$[A, B] \equiv -[B, A]$$

$$\Big[[A, B], C\Big] + \Big[[B, C], A\Big] + \Big[[C, A], B\Big] \equiv 0$$

この最後の 2 式は A, B, C がなんでであっても，常に成り立つから $\equiv$ と記した，

Poisson 括弧を使うと場の方程式（A.4-8）は

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= [\varphi_n, H] \\ \dot{p}_n &= [p_n, H]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.4-8)}'$$

となる．

さて，(A.4-6) 以下に述べたことは，$\varDelta \to 0$ の極限，つまりもとの場の理論にもどったときにどのようになるかをしらべなければならない．

まず定義（A.4-3)，(A.4-4）から

$$\lim_{\varDelta\to 0} \frac{1}{\varDelta} p_n(t) = \lim_{\varDelta\to\infty} \frac{\partial \mathfrak{L}\left\{\varphi_n(t), \dfrac{1}{\varDelta}(\varphi_{n+1} - \varphi_n), \dot{\varphi}_n(t)\right\}}{\partial \dot{\varphi}_n(t)}$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{L}\{\varphi(x,\ t),\ \partial_x \varphi(x, t), \partial_t \varphi(x, t)\}}{\partial\{\partial_t \varphi(x,\ t)\}}$$

そこでこの右辺の最後の量を π とおく．つまり

$$\pi(x,\ t) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathfrak{L}\{\varphi,\ \partial_x\varphi,\ \partial_t\varphi\}}{\partial(\partial_t\varphi)} = \lim_{\varDelta\to 0} \frac{1}{\varDelta} p_n(t) \qquad \text{(A.4-11)}$$

そこで $\varDelta \fallingdotseq 0$ のとき，$x \approx n\varDelta$ とすると，

$$p_n(t) \overset{d}{\equiv} \pi_n(t) \cdot \varDelta, \quad \lim_{\varDelta\to 0} \pi_n(t) = \pi(x,\ t) \qquad \text{(A.4-11)}'$$

と書くことができる．

(A.4-11)′ を使うと Hamiltonian は

$$\lim_{\varDelta\to 0} H(\cdots p_n \cdots;\ \cdots \varphi_n \cdots) = \lim_{\varDelta\to 0} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varDelta \cdot \{\pi_n(t) \cdot \dot{\varphi}_n(t) - \mathfrak{L}(n, t)\} \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\pi(x, t) \cdot \partial_t \varphi(x, t) - \mathfrak{L} \left\{ \varphi(x, t), \partial_x \varphi(x, t), \partial_t \varphi(x, t) \right\} \right]$$

この最後の被積分関数を

$$\mathcal{H} \overset{d}{\equiv} \pi(x,t)\cdot\partial_t\varphi(x,t) - \mathfrak{L}\{\varphi(x,t), \partial_x\varphi(x,t), \partial_t\varphi(x,t)\} \qquad \text{(A. 4 - 12)}$$

と書くことにする．もとのHの定義（A. 4 - 7）からも明らかなように，（A. 4 - 12）の右辺にある $\partial_t\varphi$ は（A. 4 - 11）の関係をつかって，すべて π, $\partial_x\varphi$, φ の関数として表わされているものとする．それゆえ $\mathcal{H}$ は $\partial_t\varphi$ には無関係で，φ, $\partial_x\varphi$, π の関数である．この $\mathcal{H}$ のことを **Hamiltonian 密度**とよぶ．これに対して

$$H \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\,dx \qquad \text{(A. 4 - 13)}$$

は場の理論における **Hamiltonian** である．

Poisson 括弧も $\Delta \to 0$ の極限ではつぎのようになる．いま A, B を p_n, φ_n ($n = 0, \pm 1\cdots$) の任意の関数とすれば，これは $\Delta \to 0$ の極限では，π, φ の汎関数となる．たとえば

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n\varphi_n^2$$

は $\Delta \to 0$ の極限では

$$\lim_{\Delta\to 0} A = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x,t)\,\{\varphi(x,t)\}^2 dx \overset{d}{\equiv} A[\pi,\varphi]$$

そこで $\Delta \to 0$ のときに $A \to A[\pi,\varphi]$, $B \to B[\pi,\varphi]$ とすると

$$\lim_{\Delta\to 0}\,[A,B] = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial A}{\partial\varphi_n(t)}\cdot\frac{\partial B}{\partial\pi_n(t)} - \frac{\partial A}{\partial\pi_n(t)}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varphi_n(t)}\right\}\left(\frac{1}{\Delta}\right) \qquad \text{(A. 4 - 14)}$$

いま $A[\pi,\varphi]$ の $\varphi(x)$ についての汎関数微分を考えてみよう*)．汎関数微分の定義はつぎのようなものである．いま $\delta\varphi(x')$ が $(x-\epsilon < x' < x+\epsilon)$ の時にだけ 0 でないとして

$$\frac{\delta A[\pi,\varphi]}{\delta\varphi(x)} \overset{d}{\equiv} \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \delta\varphi\to 0}} \frac{A[\pi,\varphi+\delta\varphi] - A[\pi,\varphi]}{\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \delta\varphi(x')\cdot dx'} \qquad \text{(A. 4 - 15)}$$

いま，点 $x \approx n\Delta$ とすると上の定義の右辺は空間を多くのマスに分割する近似法を使うと

$$\lim_{\substack{\delta\varphi\to 0\\ \Delta\to 0}} \frac{A(\pi,\cdots\varphi_n+\delta\varphi,\cdots) - A(\pi,\cdots\varphi_n\cdots)}{\Delta\cdot\delta\varphi_n} = \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{\partial A(\cdots\pi_n\cdots\varphi_n\cdots)}{\Delta\cdot\partial\varphi_n}\right)$$

と書くこともできる．したがって近似的に

$$\frac{\delta A[\pi,\varphi]}{\delta\varphi(x,t)} \doteqdot \left(\frac{1}{\Delta}\right)\cdot\frac{\partial A(\cdots\pi_n\cdots,\varphi_n\cdots)}{\partial\varphi_n(t)} \qquad \text{(A. 4 - 15)}'$$

としてよい．まったく同様に

$$\frac{\delta B[\pi,\varphi]}{\delta\pi(x,t)} \doteqdot \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial B(\cdots\pi_n\cdots,\cdots\varphi_n\cdots)}{\partial\pi_n}$$

これらの関係を使うと（A. 4 - 14）は

---

*) ここでは時間 t は任意でよいが，あるきまった時刻にきめておく，そこで $\varphi(x,t)$ を x だけの関数と考えて，便宜上 t ははぶくことにする．

$$\lim_{\Delta\to 0}[A, B] = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta A[\pi,\varphi]}{\delta\varphi(x,t)}\cdot\frac{\delta B[\pi,\varphi]}{\delta\pi(x,t)} - \frac{\delta A}{\delta\pi(\pi,t)}\cdot\frac{\delta B}{\delta\varphi(x,t)}\right\}\Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta A[\pi,\varphi]}{\delta\varphi(x,t)}\cdot\frac{\delta B[\pi,\varphi]}{\delta\pi(x,t)} - \frac{\delta A[\pi,\varphi]}{\delta\pi(x,t)}\cdot\frac{\delta B[\pi,\varphi]}{\delta\varphi(x,t)}\right\}dx$$

$$\stackrel{d}{\equiv}\Big[A[\pi,\varphi],\ B[\pi,\varphi]\Big] \qquad \text{(A. 4—14)}'$$

これが場の理論における Poisson 括弧の定義である.

たとえば

$$A[\pi,\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\delta(x'-x)dx' = \varphi(x)$$

$$B[\pi,\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty}\pi(y')\delta(y'-y)dy' = \pi(y)$$

とおく. 汎関数微分の定義から

$$\frac{\delta A[\pi,\varphi]}{\delta\varphi(z)} \equiv \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \delta\varphi\to 0}}\frac{\displaystyle\int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}\{\varphi(x')+\delta\varphi(x')\}\delta(x'-x)dx' - \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}\varphi(x')\delta(x'-x)dx'}{\displaystyle\int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}\delta\varphi(x')dx'}$$

$$= \lim\frac{2\epsilon\delta\varphi(z)\cdot\delta(z-x)}{2\epsilon\cdot\delta\varphi(z)} = \delta(z-x)$$

同様に

$$\frac{\delta B[\pi,\varphi]}{\delta\pi(z)} = \delta(z-y)$$

そこで

$$[\varphi(x), \pi(y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-x)\cdot\delta(z-y)\cdot dz = \delta(x-y)$$

となる. 同様に

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = [\pi(x), \pi(x')] = 0$$

もすぐにわかる.

この定義を使うと, $\Delta\to 0$ の極限で (A. 4-8)′ は

$$\partial_t\varphi(x,t) = [\varphi(x,t), H]$$

$$\partial_t\pi(x,t) = [\pi(x,t), H] \qquad \text{(A. 4-16)}$$

となる. この H は (A. 4-13) であたえられたものである. Poisson 括弧の定義 (A. 4-14)′ を使うと (A. 4-16) は

$$\partial_t\varphi = \frac{\delta H}{\delta\pi(x,t)}, \quad \partial_t\pi = -\frac{\delta H}{\delta\varphi(x,t)} \qquad \text{(A. 4-16)}'$$

とも書ける. これらの右辺は汎関数微分のそもそもの定義にもどると,

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(x,t)} = \frac{\partial\mathcal{H}(x,t)}{\partial\pi(x,t)} \quad \frac{\delta H}{\delta\varphi(x,t)} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi(x,t)} - \partial_x\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_x\varphi)}\right) \quad \text{(A. 4-17)}$$

となる. そこで (A. 4-16)′ は

$$\partial_t\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}(x,t)}{\partial \pi(x,t)} \qquad \partial_t\pi(x,t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi(x,t)} + \partial_x\left\{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_x\varphi)}\right\} \quad \text{(A. 4-16)}''$$

となる，（A. 4－17）の形式を導き出すのには，（A. 4－5）と（A. 4－2）が $\varDelta \to 0$ の極限で一致することを証明したときの考え方を使えばよい．

いままでは簡単のために空間は1次元とした．また場の量もスカラー関数 φ だけを問題にした．しかし3次元空間の場合への拡張は以上述べたことから容易にわかる．また場の量が多くの成分をもつ場合，すなわち $\varphi_A(x)$ （$A=1, 2, \cdots N$）としても方法は全く同じである．

Lagrange 関数を

$$\mathfrak{L}\{\varphi_A, \varphi_{A,\mu}\} \qquad \varphi_{A,\mu} = \partial_\mu\varphi_A, \qquad \mu = 0, \cdots, 3 \qquad A = 1, 2, \cdots, N$$

とする．

φ_A に正準共役な量 $\pi^A(\vec{x}, t)$ は

$$\pi^A(\vec{x}, t) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathfrak{L}(\vec{x}, t)}{\partial\{\partial_t\varphi_A(\vec{x}, t)\}} = \left(\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\varphi_{A,0})} \quad \text{(A. 4-18)}$$

Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H} = \sum_{A=1}^{N} \pi^A(\vec{x}, t)\partial_t\varphi_A(\vec{x}, t) - \mathfrak{L} \quad \text{(A. 4-19)}$$

もちろん（A. 4－19）の右辺の中にある $\partial_t\varphi_A$ は（A. 4－18）を使って π^A, $\varphi_{A,k}$ （$k=1, 2, 3$), φ_A の関数に書きなおされているものとする．また（A. 4－13）と同じように

$$H = \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} d^3x$$

が Hamiltonian である．場の方程式は各成分 A に対して

$$\begin{aligned}\partial_t\varphi_A(\vec{x}, t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^A(\vec{x}, t)} \overset{d}{\equiv} \frac{\delta H}{\delta \pi^A(\vec{x}, t)} \\ \partial_t\pi^A(\vec{x}, t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_A(\vec{x}, t)} + \sum_{k=1}^{3}\partial_k\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\varphi_{A,k})}\right) \overset{d}{\equiv} -\frac{\delta H}{\delta \varphi_A(\vec{x}, t)}\end{aligned} \quad \text{(A. 4-20)}$$

となる．

Poisson 括弧の定義は

$$[A, B] \overset{d}{\equiv} \sum_{A=1}^{N}\int\left\{\frac{\delta A}{\delta\varphi_A(\vec{x}, t)}\cdot\frac{\delta B}{\delta\pi^A(\vec{x}, t)} - \frac{\delta A}{\delta\pi^A(\vec{x}, t)}\cdot\frac{\delta B}{\delta\varphi_A(\vec{x}, t)}\right\}d^3x$$

(A. 4－21)

特別な場合を例にあげると，

$$\begin{aligned}[\varphi_A(\vec{x}, t),\ \pi^B(x', t)] &= \delta_A^B\cdot\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ &\overset{d}{\equiv} \delta_A^B\cdot\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\end{aligned}$$

(A. 4－22)

$$[\varphi_A(\vec{x}, t),\ \varphi_B(\vec{x}', t)] = 0$$
$$[\pi^A(\vec{x}, t),\ \pi^B(\vec{x}', t)] = 0$$

また，場の方程式（A. 4－20）は

$$\begin{aligned}\partial_t\varphi_A(\vec{x},t)&=[\varphi_A(\vec{x},t),H]\\ \partial_t\pi^A(\vec{x},t)&=[\pi^A(\vec{x},t),H]\end{aligned}\qquad\text{(A.4-20)}'$$

のようにも表わされる．なお t を任意にきめたときに，N 対の独立な関数 $\varphi_A(\vec{x},t)$, $\pi^A(\vec{x},t)$ $(A=1,2,\cdots,N)$ を正準力学変数とよぶ．t が変ると（たとえば t' とする）それはちがった時刻 t' における正準力学変数とみなされる．後者すなわち $\varphi_A(\vec{x},t')$, $\pi^A(\vec{x},t')$ は場の方程式によって，前者すなわち $\varphi_A(\vec{x},t),\pi^A(\vec{x},t)$ と結ばれている．この両者の関係は質点力学の場合と合じように１つの正準変換になっている．すなわち，t における φ,π から正準変換によって t' における φ,π が導きだされる．この変換の母関数は $(t'-t)\cdot H$ である．

なお正準エネルギー・運動量テンソルを

$$T^{\mu}{}_{\nu}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)}\partial_\nu\varphi_A-\delta^\mu_\nu\mathfrak{L}\qquad\text{(A.4-23)}$$

とすると，

$$P_\nu\overset{d}{\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}T^0{}_\nu d^3x\quad\text{特に}\ P_0=H$$

は，全エネルギー $(\nu=0)$，および全運動量 $(\nu=1,2,3)$ に相当する．$T^0{}_\nu$ の中にある $\partial_0\varphi_A$ をすべて π,φ で書きかえると，次の式が成立することが容易に証明できる．

$$\left.\begin{aligned}c\partial_\mu\varphi_A&=[\varphi_A,P_\mu]\\ c\partial_\mu\pi^A&=[\pi^A,P_\mu].\end{aligned}\right\}\qquad\text{(A.4-24)}$$

§ A.5 $\left[[A,B]^*,C\right]^*$ に対する Jacobi の恒等式の証明

（本文 272 ページ）

本文の定義から

$$\begin{aligned}\left[[A,B]^*,C\right]^*=&\left[[A,B],C\right]-\sum_{\mu\nu}\left[[A,Y_\mu],C\right]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu,B]\\ &-\sum_{\mu\nu}[A,Y_\mu]\cdot[Y^{-1}_{\mu\nu},C]\cdot[Y_\nu,B]\\ &-\sum_{\mu\nu}[A,Y_\mu]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot\left[[Y_\nu,B],C\right]\\ &-\sum_{\mu\nu}\left[[A,B],Y_\mu\right]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu,C]\\ &+\sum_{\mu\nu}\sum_{\rho\sigma}\left[[A,Y_\rho],Y_\mu\right]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma}\cdot[Y_\sigma,B]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu,C]\\ &+\sum_{\mu\nu}\sum_{\rho\sigma}[A,Y_\rho]\cdot[Y^{-1}_{\rho\sigma},Y_\mu]\cdot[Y_\sigma,B]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu,C]\\ &+\sum_{\mu\nu}\sum_{\rho\sigma}[A,Y_\rho]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma}\cdot\left[[Y_\sigma,B],Y_\mu\right]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu,C]\end{aligned}\qquad\text{(A.5-1)}$$

そこで A, B, C を輪環的にいれかえて加えると，(A.5-1) の第１項は普通の Poisson 括弧に対する Jacobi の恒等式のために０となる．第2, 4, 5 項も $\left[[A,Y],C\right]$ のよう

な因子に Jacobi の恒等式を適用すると，全体で打ち消し合って0となる．第6項と最後の項を一緒にすると

$$\sum\sum\left(\left[[A, Y_\rho], Y_\mu\right] + \left[[Y_\mu, A], Y_\rho\right]\right)\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma}\cdot[Y_\sigma, B]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu, C]$$
$$+ (A\to B\to C\to A) + (A\to C\to B\to A)$$

上の $(A\to B\to C\to A)$ とは，その上にある数式の中の A, B, C をそれぞれ B, C, A におきかえたものを意味する．

ところでこの第1因子は，やはり Jacobi の恒等式により書きかえられて

$$= -\sum\sum\left[[Y_\rho, Y_\mu], A\right]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma}\cdot[Y_\sigma, B]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y_\nu, C]$$
$$- (A\to B\to C\to A) - (A\to C\to B\to A) \qquad (A.5-2)$$

ところで

$$\sum_\rho\left[[Y_\rho, Y_\mu], A\right]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma} = \left[\left(\sum_\rho [Y_\rho, Y_\mu]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma}\right), A\right]$$
$$-\sum_\rho [Y_\rho, Y_\mu]\cdot[Y^{-1}_{\rho\sigma}, A]$$

ここで，

$$\sum_\rho [Y_\rho, Y_\mu]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma} = -\delta_{\sigma\mu}$$

を使うと，結局

$$\sum_\rho\left[[Y_\rho, Y_\mu], A\right]\cdot Y^{-1}_{\rho\sigma} = -\sum_\rho [Y_\rho, Y_\mu]\cdot[Y^{-1}_{\rho\sigma}, A]$$

となるから (A.5-2) は

$$= \sum\sum [Y_\rho, Y_\mu]\cdot Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y^{-1}_{\rho\sigma}, A]\cdot[Y_\sigma, B]\cdot[Y_\nu, C]$$
$$+ (A\to B\to C\to A) + (A\to C\to B\to A)$$
$$= \sum_{\nu\sigma}[Y^{-1}_{\nu\sigma}, A]\cdot[Y_\sigma, B]\cdot[Y_\nu, C] + (\cdots) + (\cdots)$$

これは (A.5-1) の第3項およびこれの A, B, C を輪換させたものとちょうど打ち消し合う．

そこで結局残るものは (A.5-1) の最後から2番目の項だけである．これは μ, ν, ρ, σ の適当ないれかえをすると

$$\left[[A, B]^*, C\right]^* + \left[[B, C]^*, A\right]^* + \left[[C, A]^*, B\right]^*$$
$$= \sum_{\mu\nu}\sum_{\rho\sigma}[A, Y_\rho]\cdot[B, Y_\sigma]\cdot[C, Y_\nu]$$
$$\times\left\{Y^{-1}_{\mu\nu}\cdot[Y^{-1}_{\rho\sigma}, Y_\mu] + Y^{-1}_{\mu\rho}\cdot[Y^{-1}_{\sigma\nu}, Y_\mu] + Y^{-1}_{\mu\sigma}\cdot[Y^{-1}_{\nu\rho}, Y_\mu]\right\} \qquad (A.5-3)$$

ところで Jacobi の恒等式

$$\left[[Y_\alpha, Y_\beta], Y_\gamma\right] + \left[[Y_\beta, Y_\gamma], Y_\alpha\right] + \left[[Y_\gamma, Y_\alpha], Y_\beta\right] \equiv 0$$

の両辺に $Y^{-1}_{\nu\alpha}$, $Y^{-1}_{\rho\beta}$, $Y^{-1}_{\sigma\gamma}$ をかけてやる．まず第1項は

$$Y^{-1}_{\nu\alpha}\cdot\Big[[Y_\alpha, Y_\beta], Y_\gamma\Big]\cdot Y^{-1}_{\rho\beta}\cdot Y^{-1}_{\sigma\gamma} = -[Y^{-1}_{\nu\alpha}, Y_\gamma]\cdot[Y_\alpha, Y_\beta]\cdot Y^{-1}_{\rho\beta}\cdot Y^{-1}_{\sigma\gamma}$$
$$= [Y^{-1}_{\nu\rho}, Y_\gamma]\cdot Y^{-1}_{\sigma\gamma}$$

となる．第2項以下も同様にかきかえると

$$Y^{-1}_{\gamma\sigma}\cdot[Y^{-1}_{\nu\rho}, Y_\gamma] + Y^{-1}_{\gamma\nu}\cdot[Y^{-1}_{\rho\sigma}, Y_\gamma] + Y^{-1}_{\gamma\rho}\cdot[Y^{-1}_{\sigma\nu}, Y_\gamma] \equiv 0$$

これはまさに（A.5-3）の右辺にでてきた量である．したがって $\Big[[A, B]^*, C\Big]^*$ に対しても Jacobi の恒等式が成立する．

参　考　文　献

一般相対論だけを書いた書物はほとんどないが，特殊相対論も一緒にした参考書としては，以下にあげるものは代表的なものといえよう．

（1） H. Weyl : Space-time-matter (translated from the German by H. L. Brose) Methuen & Co. Ltd., London (1922)

（2） A. S. Eddington : The mathematical theory of relativity, Cambridge University Press, London (1930)

（3） W. Pauli : Theory of relativity (translated from the German by G. Field), Pergamon Press, London (1958)

（4） L. Landau and E. Lifshitz : The classical theory of fields. (translated from the Russian by M. Hamermesh), Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass. (1951)

（5） C. Møller : The theory of relativity, Oxford University Press, London (1952)

（6） E. Schrödinger : Space-time structure, Cambridge University Press, London (1954)

（7） J. L. Synge : Relativity, The general theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1960)

（8） J. Weber : General relativity and gravitational waves, Interscience Publishers. Inc., New York (1961)

（9） V. Fock : The theory of space time and gravitation (translated from the Russian by N. Kemmer), Pergamon Press, London (1964)

（1） は Weyl の名著として有名であるが現在は入手し難いと思う．

（2） は表題通り数学的な本であるが，現在では数学的にみてもちょっと古すぎる．

（3） は Pauli がまだ学生のときに書いた有名な本である．内容も相当につっこんで書

いてあり，しかも非常にすっきりした名著といえる．

（4） は表題通り，場の理論の本である．しかし内容は電磁場を特殊相対論的に，また重力場を一般相対論的に記述したもので，これも大変スマートな，しかも比較的程度の高い独特なスタイルの本で一読にあたいする．邦訳されている．

（5） はもっとも標準的な相対論の教科書である．いささかごたごたしたところもあるが，入門書として一読をすすめる．邦訳もある．

（6） は数学的な面に重点をおいた小冊子である．その内容は高度ではあるが，実に説明が明快で，小冊子にもかかわらず一般相対論の重点はすべてつくされている．実にすばらしい本といえる．

（7） Synge の書物には（7）と姉妹編の特殊相対論に関する別冊があるが，（7）はもっぱら一般相対論だけを述べたものである．これは今まで紹介したものと全くちがったスタイルの書物である．数学者のかいた本であるから数学的にすぎるという欠点はあるが，内容も新らしく，しかも特異なものである．相対論の観測理論についても詳細な議論が述べられている．Advanced course の読者にすすめる．

（8） は読みやすい，親しみのもてる小冊子である．しかし重力波は著者 Weber のお家芸なので，力をいれて書いてある．

（9） は，ごたごたした本ではあるが，場の方程式の数学的議論が徹底的に論じられており，非常にまじめに良心的にかかれた名著である．“相対性理論”という言葉の解釈については著者 Fock は彼の独特のものをもっており，ともかく類をみないおもしろい書物である．高程度の読者の一読に値いする．

索　　　引

ページの太数字は主要解説を表示，→印は参照項目を示す．

キ ギ

ク グ

ケ ゲ

コ

サ ザ

シ ジ

——————1965 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics——————

Part I
MANY BODY THEORY

Edited by R. Kubo

A 5 ・166頁・1,000円・〒70

CONTENTS

R. Kubo
The Fluctuation-Dissipation Theorem and Brownian Motion

H. Mori
Relaxation Phenomena near the Critical Points

D. Pines
Elementary Excitations in a Homogeneous Bose Liquid, with Application to He II

K. A. Brueckner
Properties of Liquid Helium-Three

W. Kohn
A New Formulation of the Inhomogeneous Electron Gas Problem

J. M. Luttinger
A New Mechanism for Superconductivity

J. R. Schrieffer
Breakdown of the Quasi-Particle Approximation in Metals

P. G. de Gennes
The Landau-Ginsburg Equations and the Properties of Type II Superconductors

K. A. Brueckner
The Theory of Correlated Crystals

K. A. Brueckner
The Present Status of the Theory of Nuclear Structure

Part II
HIGH ENERGY PHYSICS

Edited by G. Takeda

A 5 ・124頁・800円・〒70

CONTENTS

G. F. Chew
Nuclear Democracy, Regge Poles and the Analytic S-Matrix

G. F. Chew
Bootstrapping with the Regge Boundary Condition

L. V. Hove
The S-Matrix at Very High Energy

T. Kinoshita
High Energy Behavior of the Forward Scattering Amplitude

R. E. Marshak
Present Status of Weak Interactions

R. E. Marshak
Parity-SU_3 Mixing for Mesons

Y. Ne'eman
Algebra and Symmetries
1) Unitary Spin and its Dynamical Extensions
2) Generalized Algebraic Methods in Particle Physics

Y. Nambu
Electromagnetic Properties of the Baryon (Hyperfine Structure of Hydrogen)

S. A. Bludman
Hidden Symmetries and the Question of Massless Particles

S. L. Glashow
Mass Formulae in $SU(3)$ and $SU(6)$

本書をご希望の方へ

1965年度版，1966年度版共，小売店の店頭には出しておりませんので，ご希望の方は最寄りの書店か本社へ直接お申し込み下さい（振替東京107番）．なお，本書の海外販売は米国ニューヨーク市，W. A. Benjamin 社と販売提携しております．

1966 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics

Part I

DYNAMICAL PROCESSES IN SOLID STATE OPTICS

Edited by R. Kubo and H. Kamimura

A 5 · 254頁 · 1,500円 · 〒70

CONTENTS

Part II

ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS

Edited by G. Takeda and A. Fujii

A 5 · 216頁 · 1,500円 · 〒70

CONTENTS

著者略歴

山内恭彦：1902年横浜市出身　日本学士院会員　東大名誉教授　現在上智大学教授　理博

内山龍雄：1916年静岡県出身　旧制静岡高校，阪大理学部物理学科卒　同学助手，講師，助教授を経て現在阪大教授（理学部物理学科）．"一般相対論および重力" の国際委員会常任委員，その間米国プリンストン高級研究所員，米国ノースカロライナ大学 場の物理学研究所客員教授として在外研究　理博

中野董夫：1926年東京都出身　旧制東京高校，阪大理学部物理学科卒，阪大大学院を了し，大阪市大理学部助手，同講師，同助教授を経て現在大阪市大理学部教授(物理学科)．その間プリンストン高級研究所，タタ基礎研究所にて研究　理博　主な著書「岩波講座　現代物理学 III. E. 新粒子論」，「素粒子の本質」（ともに共著）

一般相対性および重力の理論　　定価 1,300 円

昭和42年12月 1 日　第 1 版印刷 ©
昭和42年12月 5 日　第 1 版発行
昭和44年 6 月15日　修正第 2 版発行

著作者の了解により検印を省略いたします

著　者　山内恭彦（やまのうちたかひこ）
　　　　内山龍雄（うちやまりょうゆう）
　　　　中野董夫（なかのただお）

発行者　安孫子貞次

発行所　東京都千代田区四番町8番地
　　　　電話 東京 262—9166～8
　　　　合名会社 裳華房

印刷所　東京都墨田区亀沢1—9—14
　　　　横山印刷株式会社

製本所　東京都新宿区新小川町2の4
　　　　株式会社 青木製本所

山内恭彦・菊池正士・小谷正雄 編集

物理学選書　各A5判

1.	霜田光一著	エレクトロニックスの基礎	全訂13版・ 880円
2.	斎藤信彦著	高分子物理学（改訂版）	4 版・1600円
3.	高橋秀俊著	電磁気学	修正12版・ 850円
4.	近角聡信著	強磁性体の物理	修正6版・1000円
5.	小田 稔著	宇宙線 —高エネルギー粒子の物理学—	改訂中・近刊
6.	植村泰忠・菊池 誠著	半導体の理論と応用（上） —その半世紀の歩み—	修正6版・1100円
7.	三浦・菅 俣野 共著	放射線計測学	6 版・1000円
8.	菊池 誠著	半導体の理論と応用（中） —半導体エレクトロニクスの進歩—	3 版・ 950円
9.	武田 暁・宮沢弘成著	素粒子物理学	3 版・1300円
10.	山内恭彦・内山龍雄・中野董夫著	一般相対性および重力の理論	2 版・1300円

11. 熊谷・富永・辻・堀越

真空の物理と応用

予 350 頁・次回刊

主要目次 1 真空とは何か 2 気体の性質 3 気体と固体 4 真空内の放電 5 真空ポンプ 6 真空度測定 7 真空装置の特性 8 もれ探し 9 真空技術の応用 付録 索引

小谷正雄・森野米三・今井 功・永田 武・高橋秀俊 編集

新企画 物理科学選書　各A5判

1.	島津康男著	地球内部物理学	3 版・1400円
2.	桜井敏雄著	X線結晶解析	2 版・1700円

3. 倉谷健治・土屋荘次著

衝撃波の化学物理

1版・410頁・1500円

主要目次 I 衝撃波 II 実験法 III 化学反応速度論への応用 IV 原子，分子の励起エネルギー移動 付録 索引

4. 上村・菅野・田辺 共著

配位子場理論とその応用

最新刊・406頁・2000円

主要目次 1 序論 2 配位子場中の1個のd電子 3 正八面体群と対称操作 4 電子間相互作用 —2電子問題— 5 多重項のエネルギー（I）—多電子問題— 6 多重項のエネルギー（II）—電子と孔— 7 多重項の分裂（I）—低い対称性の配位子場— 8 原子構造と弱い結晶場の近似 9 多重項の分裂（II）—スピン軌道相互作用，ゼーマン効果— 10 光スペクトル 11 電子と核振動の相互作用 12 分子軌道の理論 13 常磁性 付録 索引

5.	大林辰蔵著	宇宙空間物理学	近刊